

Done
10-11-11

Cart by the

DATE LABEL



حُرمِ عقائد

حصہ اول

برائے

انٹرمیڈیٹ

Handwritten text in a cursive script, likely a letter or a page from a manuscript. The text is written in dark ink on aged, slightly textured paper. The handwriting is fluid and somewhat slanted, characteristic of 17th or 18th-century cursive. The first line appears to start with a capital letter, possibly 'M' or 'M'. The text continues across several lines, with some words being more legible than others due to the cursive style and fading.

Continuation of the handwritten text. The script remains consistent, showing a mix of capital and lowercase letters in a cursive hand. There are some small, dark spots or ink splatters on the paper, particularly in the middle section. The text seems to be a continuous narrative or a list of items, though the specific words are difficult to decipher due to the cursive and fading. The lines are somewhat irregular in length, suggesting a free-flowing composition.

The final section of the handwritten text on the page. The cursive script continues, with some words appearing more clearly than others. The paper shows signs of age, including slight discoloration and small dark spots. The text concludes with a few lines that seem to wrap up the previous section. The overall appearance is that of a historical document, possibly a personal letter or a page from a diary or manuscript.

40078
30/8



سلسلہ سیکرٹریٹ کے مکاتبات

نشان ۷

جبر و مقابلہ

حصہ اول

ALGEBRA

برائے انٹرمیڈیٹ

بر بنائے الجبر اہل اینڈ نائٹ
مرتبہ

قاضی محمد حسین صاحب مرحوم

سابق صدر شعبہ ریاضیات و نائب معین امیر جامعہ عثمانیہ
طبع چہارم

۱۳۶۷ھ م ۵۳۵ھ م ۱۳۸۹ھ م
مطبوعہ

الطبع مطبعہ عثمانیہ دارالانوار

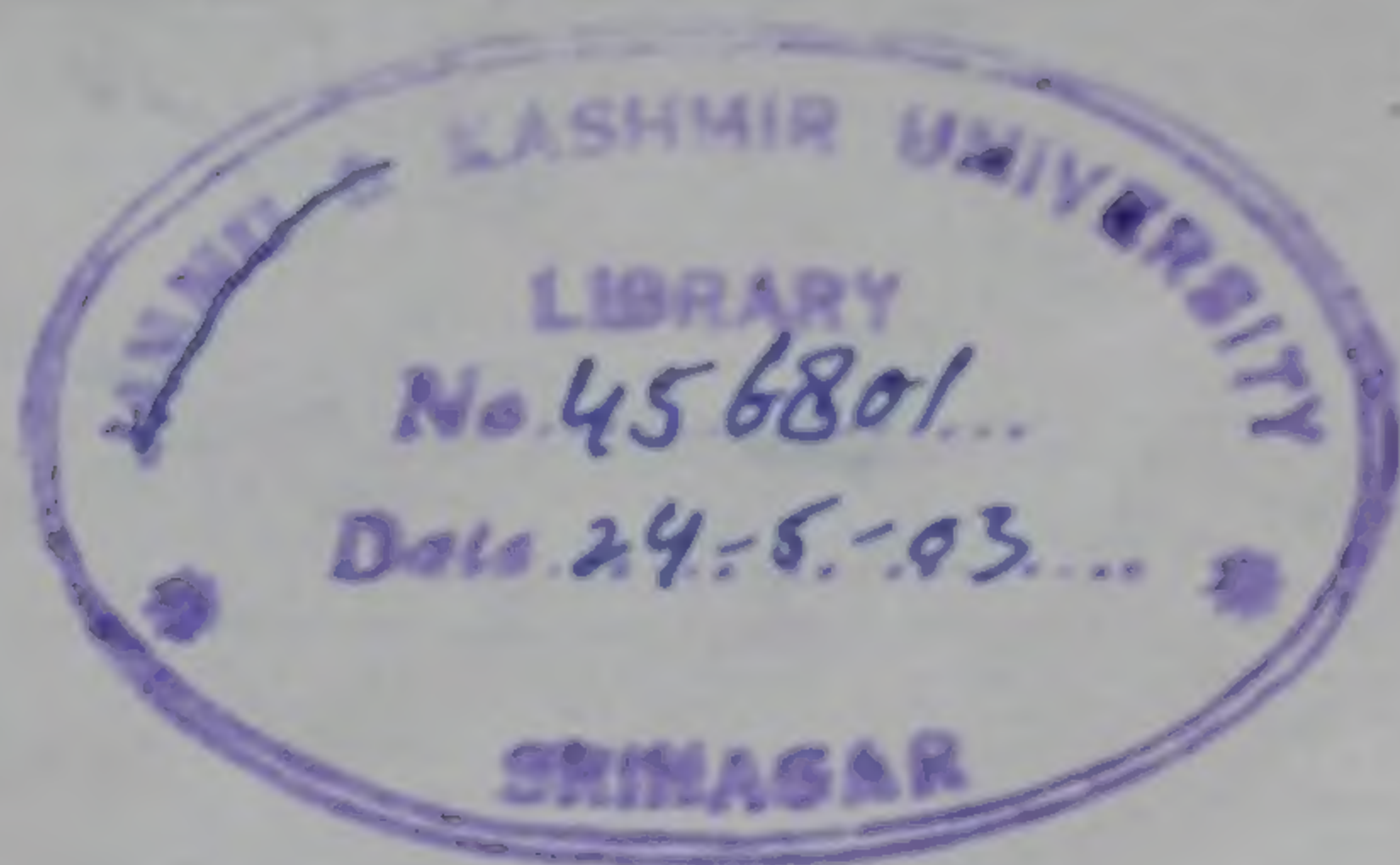


یہ کتاب میکملن کمپنی کی اجازت سے جن کو حقوق
کاپی رائٹ حاصل ہیں طبع کی گئی ہے۔

تعداد طبع (۱۰۰۰)

طبع چہارم

512
ج 14



دیباچہ

(طبع اول)

حسب ہدایات ذیلی مجلس ریاضیات، جبر و مقابلہ ص ۱۷۱ اول کہ
جامعہ عثمانیہ کی انٹرمیڈیٹ کی جامعہ کی لیے برہنہ ہے الجبر اہل اینڈ
ٹائٹ تالیف کیا گیا ہے، اگرچہ "برہنہ" کی قید اکثر تکلیف دہ اور پریشان کن
ثابت ہوئی۔ تاہم جس قدر ممکن تھا اس امر کو پیش نظر رکھ کر اس کتاب کو
اپنی حدود کے اندر مکمل بنانے کی کوشش کی گئی ہے۔ ترتیب مضامین تقریباً وہی
ہے جو اہل اینڈ ٹائٹ میں ہے، صرف سلسلہ ہندسیہ اور مسئلہ شنائی کی
بحث میں سلسلوں کے استدقاق کے متعلق چند مسائل کا اضافہ کر دیا گیا ہے
جن کے بغیر لامتناہی سلسلوں کے مجموعہ کی تعریف محض ناممکن ہے۔
اس تالیف میں خاص طور پر اس بات کو ملحوظ رکھا گیا ہے کہ جامعہ عثمانیہ
کے طلبہ کے لیے ایک عملی کتاب نصاب تیار کی جائے جس میں جملہ نظریات کی
توضیح مثالوں سے ہو، طلبہ اکثر نظریات کو از سر کر کے امتحانات میں سند
حاصل کر لیتے ہیں مگر فی الحقیقت ان میں وہ قوت تخیل اور دماغی تہوج
پیدا نہیں ہوتا جو ریاضیات کے معمولی سے معمولی طالب علم میں
ہونا چاہیے۔ اعلیٰ ریاضی کی مختلف شاخوں میں اگر بجائے نظریات کے

ہمارے نصاب اور امتحانات میں عملی مشقوں پر زیادہ زور دیا جائے تو بہتر نتائج پیدا ہو سکتے ہیں، اس نقطہ خیال سے مشقی اور حل کردہ مثالوں کی ایک کثیر تعداد نظریات کی توضیح کے لیے فراہم کی گئی ہے۔

قاضی محمد حسین

۳۲۸

دیب‌چہ

(طبع ثانی)

جبر و مقابلہ حصہ اول کی نظر ثانی مکمل طور پر کی گئی ہے۔ اس کتاب کی
طبع اول سے بعض حصے چھوڑ دیے گئے ہیں۔ نیز ہال اینڈ مائٹ کے
جبر و مقابلہ حصہ اول سے حتی الامکان مطابقت پیدا کرنے کی کوشش کی گئی ہے
باب پنجم کا کچھ حصہ اور باب چہارم کا ابتدائی حصہ جس میں لامتناہی
سلسلوں کے استدقاق پر چند آسان مسئلے ثابت کیے گئے ہیں، از سر نو
لکھا گیا ہے اور ان مسئلوں کی مدد سے مسئلہ ثنائی کی اس صورت پر جبکہ
قوت نامثبت صحیح عدد نہ ہو بحث کی گئی ہے۔
اس کتاب کی نظر ثانی میرے مشورہ کے بموجب پروفیسر محمد خواجہ محی الدین صنا
نے کی ہے۔

۱۳۴۲ ف

قاضی محمد حسین

مضامین

باب اول

نسبت

صفحہ

۳

۴

۵

متوافق اور متبائن مقادیر

نسبت صغریٰ، نسبت کبریٰ

$$\frac{پ + ل + ق + ج + (ع) + \dots}{(پ + ب + ی + د + ف + \dots)} = \dots = \frac{ع}{ق} = \frac{ج}{د} = \frac{ل}{ب}$$

$$\frac{کسر ل + ل + ل + ل + \dots + ل}{کسر ل + ل + ل + ل + \dots + ل} = \dots = \frac{ل}{ل}$$

میں سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی کے درمیان واقع

ہوتی ہے۔

ضرب چلیپائی

درجہ اول کی تین متجانس مساواتوں کا حاصل استقام

امثلہ نمبری ۱

۷

۱۰

۱۳

۱۴

باب دوم

متناسبات

۱۹

تعریفات اور مسائل

۲۴

تناسبات کی جبریہ اور ہندسیہ تعریفات کا مقابلہ

۲۶

مبائن مقداریں

۲۸

امشکہ نمبری ۲

باب سوم

تغییر

۳۱

تغیر مستقیم

۳۲

تغیر معکوس

۳۴

تغیر مشترک

اگر $y \propto x$ مابیکہ x مستقل ہو اور $y \propto \frac{1}{x}$ مابیکہ y مستقل ہو تو $y \propto x$ مابیکہ x اور y دونوں بدلیں

۳۶

توضیحی مثال

۳۶

امشکہ نمبری ۳

۳۸

باب چہارم

سلسلہ حسابیہ

۴۳

سلسلہ حسابیہ کی تعریف

۴۴

سلسلہ حسابیہ کی ن رقوموں کا مجموعہ

۴۵	اساسی ضابطے
۴۶	اواسط حسابیہ
۴۸	مشکل نمبری ۴ (۱)
۵۱	ف ن + (۱۲ - ف) ن - ۲ ص = کی اصلوں کے متعلق بحث
۵۳	مشکل نمبری ۴ (ب)
	باب پنجم
	سلسلہ ہندسیہ
۵۶	تعریفات
۵۷	اواسط ہندسیہ
۵۸	سلسلہ ہندسیہ کی ن رقموں کا حاصل جمع
۶۰	سلسلہ ہندسیہ کا استدقاق یا عدم استدقاق
۶۳	مشکل نمبری ۵ (۱)
۶۵	متوالی کسور اعشاریہ
۶۷	حسابی ہندسی سلسلے کی ن رقموں کا حاصل جمع
۷۰	سلسلہ ہندسیہ کی متفرق مثالیں
۷۲	مشکل نمبری ۵ (ب)
	باب ششم
	سلسلہ موسیقیہ اعداد طبعیہ
۷۵	سلسلہ موسیقیہ کی تعریف
۷۵	سلسلہ موسیقیہ میں جو مقادیر ہوں ان کے متعلق سلسلہ حسابیہ میں ہوتے ہیں

۷۶	موسیقی اوسط
۷۹	اواسط ح'ھ'م کا باہمی ربط
۸۰	اواسط ح'ھ'م کی ہندسی تعبیر
۸۰	سلسلوں کے متفرق سوالات حل کرنے کے لیے اشارے
۸۳	امثلہ نمبر ۶ (۱)
۸۵	اعداد طبعیہ
۸۶	ترقیم جیم ف (۱)
۸۶	پہلے ن طبعی اعداد کا حاصل جمع
۸۷	پہلے ن طبعی اعداد کے مربعوں کا حاصل جمع
۸۸	پہلے ن طبعی اعداد کے مکعبوں کا حاصل جمع
۹۲	سلسلوں کے جمع کرنے کی خاص صورتیں
۹۵	جو مینار مربع قاعدہ پر قائم ہو اس میں گولیوں کی تعداد
۹۶	جس مینار کا قاعدہ مثلث مساوی الاضلاع ہو اس میں گولیوں کی تعداد
۹۷	جس مینار کا قاعدہ مستطیل ہو اس میں گولیوں کی تعداد
۹۸	نامکمل مینار
۹۹	امثلہ نمبر ۶ (ب)
	باب ہفتم
	مقادیر احم
۱۰۳	تعریفات
۱۰۴	۱ کے نسب نما کا ناطق بنانا
	باب + اج + اد
۱۰۵	فرا + ق + اب کا منطق جزو ضربی

۱۰۸	اگر $ل + ماب = لا + ماب$ تو $ل = لا$ اور $ب = ماب$
۱۰۸	$ل + ماب$ کا جذر
۱۰۹	$ل + ماب + اج + اد$ کا جذر
۱۱۰	$ل + ماب$ کا جذر الکعب
۱۱۳	امثلہ نمبری،
	باب ششم
	مقادیر خیالی
۱۱۶	خ کی تعریف
۱۱۸	$ل - ماب = ل - ماب$
۱۱۹	اگر $ل + ماب = ل - ماب$ تو $ل = ماب$
۱۱۹	اگر $ل + ماب = ل - ماب$ تو $ل = ماب$
۱۱۹	مزدوج خیالی مقداریں
۱۲۰	دو خیالی عددوں کے حاصل ضرب کا مقياس اُن کے
۱۲۲	مقياسوں کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے
۱۲۳	$ل + ماب$ کا جذر
۱۲۳	$ل - ماب$ یا $خ$ کی قوتیں
۱۲۵	اکائی کے تین جذر الکعب
۱۲۶	$س + س + س = ۱$
۱۲۶	س کی قوتیں
۱۲۸	امثلہ نمبری ۸

باب پنجم

مسائل مساوات درجہ دوم

- ۱۳۱ مساوات درجہ دوم کی صورت عامہ
 ۱۳۱ مساوات درجہ دوم کی دو سے زیادہ اصلیں نہیں ہو سکتیں۔
 ۱۳۳ مساوات درجہ دوم کا حل
 ۱۳۴ مساوات درجہ دوم کی اصلیں حقیقی، مساوی، خیالی ہونے کی شرائط

اصلوں کا حاصل جمع = $\frac{ب}{ا}$ اور اصلوں کا حاصل ضرب
 $= \frac{ج}{ا}$

- ۱۳۵ اصلیں معلوم ہوں تو مساوات کا مرتب کرنا
 ۱۳۷ اس کے لیے شرائط کہ درجہ دوم کی مساوات کی اصلیں
 (۱) مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہوں۔
 (۲) ایک دوسرے کی مقلوب ہوں

- ۱۴۰ امثلہ نمبر ۹ (ا)
 ۱۴۲ لا کی حقیقی قیمتوں کے لیے جملہ لا + ب + ج کی علامت دہی
 ۱۴۵ ہوتی ہے جو لا کی ہے سوائے چند صورتوں کے۔

- ۱۴۸ امثلہ نمبر ۹ (ب)

- ۱۵۱ تعریفات :- تفاعل، متغیر، منطبق، صحیح تفاعل
 ۱۵۲ لا + لا + ۵۲ + لا + ب + ما + ۲ + گ + لا + ۲ + ف + ما + ج کے
 دو خطی اجزائے ضربی میں تحلیل ہونے کی شرط

لا + ب لا + ج = اور لا + ب لا + ج = کی ایک
اصل مشترک ہونے کی شرط
امثلہ نمبری ۹ (ج)

۱۵۳

۱۵۴

باب دوم
مساواتیں مجموع مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہو سکتی ہیں

۱۵۶

مساوات {ج (لا) } + ف {ج (لا) } + ق = کا حل

۱۵۹

مساوات لا + ب لا + ج + ف {ج (لا) } + ق = کا حل

۱۶۴

متکافی مساواتیں

۱۶۶

امثلہ نمبری ۱۰ (ا)

۱۶۹

دو مقادیر مجہول کی ہمزاد مساواتیں

۱۷۱

متجانس مساواتیں

۱۷۴

امثلہ نمبری ۱۰ (ب)

۱۷۶

تین یا تین سے زیادہ مقادیر مجہول کی مساواتیں

۱۷۸

امثلہ نمبری ۱۰ (ج)

باب یازدہم
ترتیب و اجتماع

۱۸۲

ابتدائی مسائل

۱۸۴

ن اشیا میں سے ر اشیا کی ترتیبوں کی تعداد

۱۸۹

ن اشیا میں سے ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد

ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد وہی ہوتی ہے جو انہی اشیا میں سے ن۔ ر، ن۔ ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد ہو۔

۱۹۲

ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے ایسے اجتماع جن میں ایک خاص شے ہمیشہ شامل ہوتی ہے

۱۹۴

ل + م + ن اشیا کے پارسل

۲۰۰

امثلہ نمبری ۱۱ (۱)

۲۰۳

۲۰۴

مختلف اور متشابہ اشیا

جب ن اشیا میں سے ف متشابہ اشیا ایک قسم کی ہوں، ق متشابہ اشیا دوسری قسم کی، ر متشابہ اشیا تیسری قسم کی اور باقی سب مختلف تو ان سب اشیا کی کچھ ترتیبوں کی تعداد۔

۲۰۸

ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کی ترتیبیں اس صورت میں جبکہ ہر ایک شے کسی ایک ترتیب میں ایک مرتبہ، دو مرتبہ، تین مرتبہ... ر مرتبہ تکرار پاسکے۔

۲۱۲

۲۱۳

ن اشیا میں سے چند یا سب اشیا منتخب کرنے کے کل ممکن طریقے

۲۱۳

ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں کی بڑی سے بڑی تعداد

۲۱۶

ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد ابتدائی اصولوں کی مدد سے۔

۲۱۸

$$ن_1 + ن_2 = ن_{1+2}$$

ف + ق + ر + اشیا میں سے چند یا سب کی سب اشیا منتخب کرنے کے کل ممکن طریقے اس صورت میں جبکہ ف متشابہ اشیا ایک قسم کی ہوں، ق متشابہ اشیا دوسری قسم کی، متشابہ اشیا تیسری قسم کی اور علیٰ ہذا القیاس

۲۱۸

۲۲۰

مذکور ترتیبیں

۲۲۱	موتوں کے بار
۲۲۵	مشلہ نمبری ۱۱ (ب)
	باب دوازدہم
	استقراء حسابیہ
۲۲۹	ترکیب ثبوت اور توضیحی مثالیں
۲۳۱	ن اجزائے ضربی ثنائی (بشکل لا + ل) کا حاصل ضرب
۲۳۳	مشلہ نمبری ۱۲
	باب سیزدہم
	مسئلہ ثنائی
۲۳۶	(لا + ل) کی صورت تفصیلی جبکہ ن مثبت صحیح عدد ہو
	استقراء حسابیہ کی روش سے مسئلہ ثنائی کا ثبوت مثبت
	تاکل میں متنا
۲۳۷	مثال: اگر $2 \times 2 = 4$ اور $3 \times 3 = 9$ تو $4 \times 4 = 16$ اور $5 \times 5 = 25$ کی صورت میں
۲۳۸	ن مثبت صحیح عدد ہو تو (لا + ل) کی صورت تفصیلی میں
۲۳۹	شروع اور اخیر سے متساوی الفصل رقموں کے سر برابر ہوتے ہیں۔
۲۴۰	(لا + ل) کی صورت تفصیلی میں سب سے بڑی رقم جبکہ
۲۵۰	ن مثبت صحیح عدد ہو۔
۲۵۲	رقموں کے سروں کا مجموعہ جبکہ ن مثبت صحیح عدد ہو

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو $(۱ + لا)$ کی صورت تفصیلی میں مثبت
رقموں کے سروں کا مجموعہ طاق رقوموں کے سروں کے مجموعے کے
برابر ہوتا ہے۔

۲۵۴

۲۵۴

۲۵۷

۲۵۸

جملہ کثیر الارقام کا پھیلاؤ

متفرق مثالیں

امثلہ نمبری ۱۳ (ب)

باب چہارم

لا متناہی سلسلے مسئلہ ثنائی کسی قوت نمایاں

انتہا

۲۶۲

۲۶۳

۲۶۵

۲۷۲

۲۷۳

۲۷۵

۲۷۹

۲۸۱

لا متناہی سلسلے

لا متناہی سلسلوں کے لیے استدقاق کے عام مسئلے -

امثلہ نمبری ۱۴ (۱)

ثنائی سلسلہ کا استدقاق

قوت نما کی کسی منطق قیمت کے لیے مسئلہ ثنائی کا ثبوت

$(۱ + لا)$ کے پھیلاؤ میں رقم عامہ

امثلہ نمبری ۱۴ (ب)

مسئلہ ثنائی کی مدد سے جملہ $(لا + ۱)$ کا پھیلاؤ ہمیشہ حاصل

ہو سکتا ہے۔

۲۸۳

۲۸۳

۲۸۵

۲۸۶

۲۹۰

۲۹۲

$(۱ - لا)$ کے پھیلاؤ میں رقم عامہ

$(۱ - لا)$ کے پھیلاؤ کی خاص صورتیں

تقریبات

امثلہ نمبری ۱۴ (ج)

$(۱ + لا)$ کے پھیلاؤ میں لمباتا عددی قیمت کے بڑی سے بڑی رقم

۲۹۵	ن حروف ا، ب، ج، اور ان کی مختلف قوتوں سے
۲۹۶	ابہاد کے جو متجانس حاصل ضرب بن سکیں ان کی تعداد۔
۲۹۶	کسی جملہ کثیر ارقام کی صورت تفصیلی میں رقموں کی تعداد۔
۲۹۶	ن اشیا میں سے د، ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد جبکہ اشیا
۲۹۹	کے تکرار کی اجازت ہو۔
	مشکل نمبر ۱۴ (د)
	باب پانزدہم
	مسئلہ کثیر الارقام
۳۰۴	(۱+ب+ج+د+.....) کی صورت تفصیلی میں کسی رقم
	معینہ کا سر جبکہ ع مثبت صحیح عدد ہو۔
۳۰۶	(۱+ب+لا+د+لا+.....) کی صورت تفصیلی کی رقم عامہ
۳۰۸	جبکہ ن کوئی مقدار ناطق ہو۔
	مشکل نمبر ۱۵
	باب شانزدہم
	لوکارم
۳۱۰	تعریف۔ ن = د کوکون
۳۱۱	ابتدائی مسائل
۳۱۵	مشکل نمبر ۱۶ (۱)

۳۱۷	مروج لوکارتم
۳۱۸	کسی عدد کے لوکارتم کا ممیز اساس ۱۰ پر
۳۲۰	اعداد کے لوکارتم اساس ۱۰ پر نکالنے کے فوائد
۳۲۱	اعشاریہ لوکارتمی کو ہمیشہ مثبت رکھنے کے فوائد
	اگر اساس ۱ پر تمام اعداد کے لوکارتم معلوم ہوں تو اساس ب پر
۳۲۳	ان کے لوکارتم نکالنے کا طریقہ
۳۲۴	لوک \times ب = لوک \div = ۱
۳۲۷	مشکل نمبری ۱۶ (ب)
	باب ہفتم
	قوت نمائی اور لوکارتمی سلسلے
۳۳۰	لوکی صورت تفصیلی۔ لوکی قیمت سلسلے کی صورت میں
۳۳۱	نہیں $(1 + \frac{1}{n})^n = 2$
	لوکی تمام محدود قیمتوں کے لیے لوکی صورت تفصیلی
۳۳۲	لوکارتمی جدولوں کا مرتبہ گونا
۳۳۵	لوک (۱ + n) - لوک n کا پھیلاؤ سلسلے کی صورت میں مقدار
۳۳۷	و قبا ئں ہے۔
۳۳۸	مشکل نمبری ۱۷
۳۳۹	جوابات

جبر و مقابلہ

حصہ اول

باب اول

نسبت

۱۔ تعریف۔ نسبت سے مراد وہ ربط ہے جو ایک مقدار کو اسی جنس کی کسی دوسری مقدار کے ساتھ ہو اور اس ربط کو اس طرح مقابلہ کرنے سے دیکھتے ہیں کہ ایک مقدار دوسری مقدار کا کونسا ضعف، حصہ یا حصے ہیں۔

۱ اور ب کی نسبت کو بالعموم ۱: ب لکھتے ہیں، مقادیر ۱ اور ب کو ارقام نسبت کہتے ہیں۔ پہلی رقم مقدم نسبت کہلاتی ہے اور دوسری رقم موخر نسبت۔

۲۔ اگر یہ معلوم کرنا ہو کہ ۱، مقدار ب کا کونسا ضعف یا حصہ ہے تو ۱ کو ب پر تقسیم کرنا چاہیے، پس نسبت ۱: ب ناپی جاسکتی ہے کسر ۱ سے اور آئندہ اسی طریق کتابت کو اختیار کرنے میں سہولت ہوگی۔

اگر دو مقداروں کا مقابلہ کرنا ہو تو انہیں ایک ہی اکائی کی رقم میں بیان کرنا چاہیے پس دو پونڈ اور ۵ اشکنگ کی نسبت کا ناپ کسر $\frac{20 \times 12}{15}$ یعنی ۱۶۰ ہے۔

نوٹ۔ چونکہ لفظ نسبت سے یہ معنی مفہوم ہوتے ہیں کہ ایک مقدار کتنی دفعہ دوسری مقدار میں شامل ہے اس لیے ہر ایک نسبت مقدار راجحہ ہے۔

۳۔ چونکہ کسروں کے خواص کے مطابق $\frac{1}{ب} = \frac{1}{م} = \frac{1}{ب}$

اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نسبت ۱ : ب نسبت م : ۱ : م ب کے مساوی ہے یعنی اگر کسی نسبت کے مقدم م اور موخر دونوں کو ایک ہی مقدار سے ضرب دیا جائے یا تقسیم کیا جائے تو نسبت کی قیمت میں فرق نہیں آتا۔

۴۔ دو یا دو سے زیادہ نسبتوں کا مقابلہ ان کی مساوی کسروں کے نسب نماؤں کو مساوی بنانے سے ہو سکتا ہے۔ فرض کرو کہ دو مجوزہ نسبتیں

۱ : ب اور لا : ما ہیں۔ چونکہ $\frac{1}{ب} = \frac{1}{ما}$ اور $\frac{1}{لا} = \frac{1}{ب}$

اس لیے نسبت ۱ : ب بڑی ہے یا برابر ہے یا چھوٹی ہے نسبت لا : ما سے بموجب اس کے کہ ۱ ما بڑا ہے یا برابر ہے یا چھوٹا ہے ب لا سے۔

۵۔ دو کسروں کی نسبت دو صحیح عددوں کی نسبت سے تعبیر ہوتی ہے پس نسبت

$\frac{1}{ب} : \frac{1}{ج}$ کا ناپ کسر $\frac{1}{ب} \div \frac{1}{ج}$ یعنی $\frac{1}{ب} \times ج$ ہے اور اس لیے نسبت

مذکورہ ۱ : ب ج کے مساوی ہے۔

۶۔ اگر کسی نسبت کی ایک یا دونوں رقمیں مقادیر اصم ہوں تو دو

ایسے اعداد نہیں مل سکتے جو اس نسبت کو ٹھیک ٹھیک تعبیر کر سکیں۔

مثلاً نسبت ۵:۱۱ صحیح طور پر دو صحیح عددوں کی قوم میں بیان نہیں ہو سکتی۔
تعریف۔ جب دو مقداروں کو ایک تیسری مقدار پورا پورا تقسیم
 کر دے تو انہیں مقادیر متوافقہ کہتے ہیں اور اس تیسری مقدار کو وفق مشترک
 کہتے ہیں اور جب دو مقداروں کا کوئی وفق مشترک نہ ہو تو ان کو قباآن کہتے ہیں۔
 ۷۔ اگرچہ دو ایسے صحیح عدد نہیں معلوم ہو سکتے جو دو مقادیر قباآن کی
 نسبت کو ٹھیک ٹھیک بیان کر سکیں، تاہم دو ایسے صحیح عدد دریافت ہو سکتے
 ہیں جن کی نسبت کا تفاوت نسبت مطلوبہ سے اتنا چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں۔

$$\text{مثلاً } \frac{5}{11} = \frac{2523606400000000}{5590160000000000}$$

$$\text{اور اس لیے } \frac{5}{11} < \frac{559016}{1000000} \text{ اور } \frac{559014}{1000000}$$

پس نسبت ۵:۱۱:۱۰۰۰۰۰۰ اور ۵:۱۱:۴ میں
 فرق ۱۰۰۰۰۰ سے کم ہے۔ اگر تعداد اعشاریہ زیادہ لی جائے تو اس سے
 بھی اچھا تقریب حاصل ہو سکتا ہے۔

۸۔ اگر نسبتوں کے سب مقدماتوں کو آپس میں ضرب دے کر نیا مقدم
 بنائیں اور سب موخروں کو ضرب دے کر ایک نیا موخر بنائیں تو جو نسبت اس
 جدید مقدم کو جدید موخر سے ہوگی اسے نسبت مؤلفہ ان نسبتوں کی کہیں گے۔
 مثال۔ نسبت مؤلفہ تین مفصلہ ذیل نسبتوں کی معلوم کرو۔

$$۱۲:۱۳ \text{ ب } ۱۶:۱۷ \text{ ج } ۵:۶ \text{ ج } ۱:۲$$

$$\text{نسبت مطلوبہ} = \frac{۱۲}{۱۳} \times \frac{۱۶}{۱۷} \times \frac{۵}{۶} = \frac{۱۲}{۵}$$

اگر نسبت ۱:۲ کی تالیف نسبت ۱۶:۱۷ سے کی جائے تو ۱:۲
 پیدا ہوتی ہے، اسے ۱:۲ کی دوسری نسبت کہتے ہیں۔ اسی طرح سے
 ۱۶:۱۷ کو ۱:۲ کی تہری نسبت کہتے ہیں۔ نیز ۱۶:۱۷، ۱:۲ کی
 جذری نسبت ہے۔

مثال (۱) نسبت ۱:۲:۳ ب کی دوسری نسبت ۴:۵:۶ ہے۔

(۲) نسبت ۴۹:۲۵ کی جذری نسبت ۷:۵ ہے۔

(۳) نسبت ۲:۱:۱ کی تہری نسبت ۸:۱:۱ ہے۔

۹۔ اگر $1 < \frac{a}{b}$ تو $1:b$ نسبت کبریٰ غیر مساوی کہلاتی ہے۔

اگر $1 > \frac{a}{b}$ تو $1:b$ نسبت صغریٰ غیر مساوی کہلاتی ہے۔

اگر $1 = \frac{a}{b}$ تو $1:b$ نسبت مساوات کہلاتی ہے۔

۱۰۔ اگر $\frac{a}{b}$ اور $\frac{c}{d}$ تین مثبت مقادیر ہوں تو نسبت $1:b$ بالترتیب

بڑی ہوگی یا چھوٹی ہوگی نسبت $1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ سے بوجب اس کے کہ
 1 بڑا ہو یا چھوٹا ہو یا برابر ہو۔

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b+a} = \frac{1}{b(b+a)} = \frac{1}{b(b+1)} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{b} - \frac{1}{b+1} = \frac{1}{b(b+1)}$$

اور $1 - \frac{b}{b+1}$ ہے یا منہی بمطابق اس کے کہ 1 بڑا ہے یا چھوٹا ہے
 b سے۔

$$\text{اس لیے اگر } 1 < \frac{a}{b} \text{ تو } \frac{1}{b} < \frac{1}{b+1}$$

$$\text{اور اگر } 1 > \frac{a}{b} \text{ تو } \frac{1}{b} > \frac{1}{b+1}$$

جس سے ہمارا دعویٰ ثابت ہے۔

اسی طرح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ نسبت $1:b$ بالترتیب بڑی
 ہوگی یا چھوٹی ہوگی $1 - \frac{a}{b}$ سے بوجب اس کے کہ 1 چھوٹا ہو یا بڑا ہو
 b سے۔

۱۱۔ جب دو یا زیادہ نسبتیں آپس میں برابر ہوں تو ان میں سے ہر ایک کو
 کسی حرف کے مساوی رکھنے سے کئی ایک کارآمد مسائل ثابت ہو سکتے ہیں۔
 طریقہ عمل کی توضیح ذیل کے مشہور مسئلہ کے ثبوت سے ہوگی۔

$$\text{اگر } \frac{1}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$$

تو ہر ایک نسبت = $\left(\frac{پ + ق + ج + ع + \dots}{پ + ق + د + ر + ف + \dots} \right)$
 جہاں پ، ق، ر کوئی مقداریں ہیں اور ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

فرض کرو کہ $\frac{پ}{د} = \frac{ج}{و} = \frac{ع}{ف} = \dots = ک$

تب $پ = ک د$ ، $ج = ک و$ ، $ع = ک ف$ ، \dots

اس لیے $\frac{پ + ق + ج + ع + \dots}{پ + ق + د + ر + ف + \dots}$

$= \frac{پ + ق + د + ر + ف + \dots}{پ + ق + د + ر + ف + \dots} = ک$

اس لیے $\left(\frac{پ + ق + ج + ع + \dots}{پ + ق + د + ر + ف + \dots} \right) = ک = \frac{پ}{د} = \frac{ج}{و} = \frac{ع}{ف} = \dots$

پ، ق، ر، ن کو مختلف قیمتیں دینے سے اس مسئلہ عامہ سے کئی خاص صورتیں حاصل ہو سکتی ہیں یا بلا واسطہ مندرجہ بالا طریقہ کے استعمال سے ثابت ہو سکتی ہیں۔

مثلاً اگر $\frac{پ}{د} = \frac{ج}{و} = \frac{ع}{ف} = \dots$

تو ان میں سے ہر ایک نسبت = $\frac{پ + ج + ع + \dots}{پ + د + ر + ف + \dots}$

یہ نتیجہ نہایت کار آمد ہے اس کو الفاظ میں یوں بیان کر سکتے ہیں۔ اگر کئی کسریں باہم مساوی ہوں تو ان میں سے ہر ایک کسر ایک ایسی کسر کے برابر ہوتی ہے جس کا شمار کنندہ سب شمار کنندوں کا حاصل جمع اور جس کا نسب نما تمام نسب نماؤں کا حاصل جمع ہو۔

مثال (۱)۔ اگر $\frac{پ}{د} = \frac{ج}{و} = \frac{ع}{ف}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ا^1ب + ۲ج^2ع - ۳د^3ع^4ف}{ب^2 + ۲د^3ف} = \frac{۱ج^۱ع}{ب^۱د^۱ف}$$

$$\text{فرض کرو کہ } \frac{۱}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{ع}{ف} = ک$$

$$\text{تب } ۱ = ب^۱ک = د^۱ک = ع^۱ک = ف^۱ک$$

$$\therefore \frac{ا^1ب + ۲ج^2ع - ۳د^3ع^4ف}{ب^2 + ۲د^3ف}$$

$$= \frac{ا^۱ک + ۲د^۲ک^۲ - ۳د^۳ک^۳}{ب^۲ + ۲د^۳}$$

$$= ک^۲ = \frac{۱}{ب} \times \frac{ج}{د} \times \frac{ع}{ف} = \frac{۱ج^۱ع}{ب^۱د^۱ف}$$

$$\text{مثال (۲)۔ اگر } \frac{۱}{ا} = \frac{ب}{۱} = \frac{۱}{ج} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\frac{لا^۱ + و^۱}{۱ + لا} + \frac{ا^۱ + ب^۱}{۱ + ا} + \frac{ی^۱ + ج^۱}{۱ + ی} = \frac{(لا + ا + ی) + (۱ + ۱ + ۱)}{لا + ا + ی + ۱ + ۱ + ۱}$$

$$\text{فرض کرو کہ } \frac{۱}{ا} = \frac{ب}{۱} = \frac{۱}{ج} = ک$$

$$\text{اس لیے } لا = وک، ا = بک، ی = جک$$

$$\frac{لا^۱ + و^۱}{۱ + لا} = \frac{وک^۱ + و^۱}{۱ + وک} = \frac{ک(۱ + ۱)}{۱ + ک}$$

$$\text{اس لیے } \frac{لا^۱ + و^۱}{۱ + لا} + \frac{ا^۱ + ب^۱}{۱ + ا} + \frac{ی^۱ + ج^۱}{۱ + ی}$$

$$= \frac{ک(۱ + ۱)}{۱ + ک} + \frac{ک(۱ + ۱)}{۱ + ک} + \frac{ک(۱ + ۱)}{۱ + ک}$$

$$= \frac{ک(۱ + ۱ + ۱ + ۱)}{۱ + ک}$$

فرض کرو کہ سب نسب نامہ ثابت ہیں۔ اگر $\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج}$ سب سے چھوٹی کسر ہو تو اس کو ک سے تعبیر کرو۔ تب

$$\frac{ا}{ب} = ک \quad \frac{ب}{ج} = ک$$

$$\frac{ا}{ب} < ک \quad \frac{ب}{ج} < ک$$

$$\frac{ا}{ب} > ک \quad \frac{ب}{ج} > ک$$

اس لیے جمع کرنے سے

$$\frac{ا}{ب} + \frac{ا}{ب} + \dots + \frac{ا}{ب} < ک + ک + \dots + ک$$

$$\frac{ا}{ب} + \frac{ا}{ب} + \dots + \frac{ا}{ب} < ک + ک + \dots + ک$$

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{ا}{ب} > ک \quad \frac{ب}{ج} > ک$$

جہاں کسر $\frac{ا}{ب}$ دی ہوئی کسروں میں سب سے بڑی ہے۔

اسی طرح سے مسئلہ ثابت ہو سکتا ہے جب تمام نسب نامہ منفی ہوں۔

۴۱۔ دفعہ ۱۱ کے عام اصول کا برجستہ استعمال ریاضی کی ہر شاخ میں ایسا کارآمد ہے کہ طالب علم کو خاص صورتوں میں جب کبھی ضرورت پڑے اسے بلا تکلف استعمال کرنا چاہیے اور یہ ضروری نہیں کہ معاون مقدار ک کو اٹھائے عمل میں داخل کیا جائے۔

$$\text{مثال (۱) اگر } \frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = \frac{د}{ه} = \frac{ه}{و} = \frac{و}{ز} = \frac{ز}{ح} = \frac{ح}{ط} = \frac{ط}{ق} = \frac{ق}{ک} = \frac{ک}{خ} = \frac{خ}{د} = \frac{د}{ر} = \frac{ر}{س} = \frac{س}{ی}$$

$$\frac{ل}{ی} = \left(\frac{لا}{ی}\right) + \left(\frac{ما}{ی}\right) + ج = ۰$$

میں لکھتے سے اور $\frac{لا}{ی}$ اور $\frac{ما}{ی}$ کو مجہول مقداریں تصور کرنے سے ہم معمولی طریقہ سے حل کر کے حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{لا}{ی} = \frac{ب ج - ب ج}{ب ج - ب ج} = \frac{ب ج - ب ج}{ب ج - ب ج} = \frac{لا}{ی}$$

یا متشاکلاً (۳)

اس سے ظاہر ہے کہ جب کبھی دو مساواتیں بشکل (۱) اور (۲) معلوم ہوں تو اوپر کے قاعدے کی مدد سے ہم نسبتوں لا : ما : ی کو مساواتوں کے سروں کی رقوم میں باسانی لکھ سکتے ہیں۔ اس کے یاد رکھنے کا آسان طریقہ یہ ہے۔
ما کے سر سے شروع کر کے لا، ما، ی کے سروں کو بالترتیب لکھ لو اور انہیں مکرر اس طرح لکھو جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے۔



سروں کو ترتیبی سمت میں ضرب دو جیسے کہ تیر کے رخ سے ظاہر ہے اور ان حاصل ضربوں کے بنانے میں یاد رکھو کہ کوئی حاصل ضرب جو تیر کے نیچے اترنے سے حاصل ہو وہ مثبت ہوگا اور تیر کے اوپر چڑھنے سے حاصل ہو وہ منفی ہوگا تین نتائج ب ج - ب ج ج ل - ج ل ل ب - ل ب ب ل بالترتیب لا، ما، ی کے متناسب ہیں۔ اس کو ضرب چلیپائی کا قاعدہ کہتے ہیں۔

مثال (۱) مساواتوں، لا = ۴ ما + ۸ ی = ۳ ی = ۱۲ لا + ۱۱ ما سے

نسبتیں لا: ما: ی معلوم کرو:۔

عمل نقل سے $۷ - لا - ما - ۸ - ی = ۰$

$۱۲ - لا + ما - ۳ - ی = ۰$

سروں کو اس طرح لکھو $۳ - ۷ - ۸ - ۷ - ۲$

$۱۱ - ۱۲ - ۳ - ۱۱$

ان سے مفصلہ ذیل حاصل ضرب حاصل ہونگے

$(۳ - ۲) \times (۱۱ - ۱۲) - (۷ - ۷) \times (۸ - ۷) - (۱۲ - ۱۱) \times (۳ - ۲)$
یا $۱۰۰ - ۷۵ - ۱۲۵$

اس لیے $\frac{۷}{۱۲۵} = \frac{۷}{۷۵} = \frac{لا}{۱۰۰}$

یعنی $\frac{۷}{۵} = \frac{۷}{۳} = \frac{لا}{۲}$

مثال (۲) ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:۔

(۱) $لا + ب + ما + ج + ی = ۰$

(۲) $لا + ما + ی = ۰$

(۳) $ب + ج + لا + ما + ب + ی = (ب - ج)(ج - ب)(ج - ۱)(۱ - ب)$
(۱) اور (۲) سے بموجب قاعدہ ضرب چلیپائی

(فرض کرو) $\frac{لا}{ب - ج} = \frac{ما}{ج - ۱} = \frac{۷}{۱ - ب} = ک$

اس لیے $لا = (ب - ج)ک$ ، $ما = (ج - ۱)ک$ ، $۷ = (۱ - ب)ک$
(۳) میں یہ قیمتیں رکھنے سے

$ک = (ب - ج)ک + (ج - ۱)ک + (۱ - ب)ک$
 $= (ب - ج)(ج - ۱)(۱ - ب)$

$ک = (ب - ج)(ج - ۱)(۱ - ب)ک$
یا $ک = ۱$

$$= 2 + 1 + 1$$
$$= \frac{1}{2} (a + b + c)$$

اور نتیجہ (۳) سے حاصل ہو گا

$$\frac{1}{\text{ب, ب} - \text{ب, ب}} = \frac{6}{\text{ج, ج} - \text{ج, ج}} = \frac{11}{\text{د, د} - \text{د, د}}$$

$$\frac{ج_1 - ج_2}{ج_1} = 1 \text{ اور } \frac{ج_2 - ج_1}{ج_2} = 1$$

لو ب - لو پ - لو ب - لو پ

اس لیے ظاہر ہے کہ دو مجہول مقداروں میں درجہ اول کی دو ہندسہ مساوی ضرب چلیبیائی کے قاعدہ سے حل ہو سکتی ہیں۔

مثال - حل کرو $12 = 62 + 116 = 1 - 63 - 115$

عمل نقل سے ۵ لا - ۶۳ - ۱ = ۰

$$\bullet = 12 - 62 + 0$$

$$\frac{1}{r+10} = \frac{6}{90+10} = \frac{6}{100} \therefore$$

جس سے لا = $\frac{1.38}{13} = \frac{59}{13}$

۱۷۔ لا، ما، ی کو ذیل کی مساواتوں سے ساقط کرو۔

۱) لا + ب + ج ی = (۱)

اولا + ب + ج = (۲)

$$(3) \dots\dots\dots = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

مسماواتوں (۱) اور (۲) سے

$$\text{یک (فرض کرو)} = \frac{\text{ی}}{\text{۱ ب ۲ - ۱ ب ۱}} = \frac{\text{۶}}{\text{ج ۱ - ج ۲}} = \frac{\text{۱۱}}{\text{ب ۱ ج - ب ۲ ج}}$$

(۳) میں لا کی جگہ (بم ج - بم ج) ک اور ماوری کی جگہ تشابہ جملے رکھنے سے اور ک پر تقسیم کرنے سے یہی حاصل ہوگا۔
 لم (بم ج - بم ج) + بم (ج لم - ج لم) + ج (لم بم - لم بم) =
 اس ربط کو دی ہوئی مساواتوں کا حاصل اسقاط کہتے ہیں۔

امثلہ نمبری (۱)

۱- نسبت مؤلفہ دریافت کرو۔

(۱) نسبت ۱۲ : ۳ ب اور دوہری نسبت ۹ ب : ۱ ب کی۔

(۲) جذری نسبت ۶۴ : ۹ اور نسبت ۲۷ : ۵۶ کی

(۳) دوہری نسبت $\frac{۱۲}{۱۰} : \frac{۶۴}{۲۷}$ اور نسبت ۱۳ : ۱۱ : ۲ ب م کی۔

۲- اگر لا + ۷ : ۲ (لا + ۱۴) دوہری نسبت ہو ۵ : ۸ کی تو لا معلوم کرو۔

۳- دو ایسے عدد دریافت کرو جن کی نسبت ۱۲ : ۱۱ ہو اور جن میں سے ایک عدد دوسرے عدد سے بقدر ۲۷ کے بڑا ہو۔

۴- نسبت ۵ : ۳ کی ہر ایک رقم میں کیا عدد زیادہ کیا جائے کہ یہ نسبت ۳ : ۱ کے برابر ہو جائے؟

۵- اگر لا : ما = ۳ : ۴ تو نسبت ۷ : لا - ۴ ما : ۳ لا + ما کی قیمت دریافت کرو۔

۶- اگر ۱۵ (لا - ما) = ۷ لا ما تو نسبت لا : ما دریافت کرو۔

۷- اگر $\frac{۱}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{ع}{ف}$ تو ثابت کرو کہ

$$(۱) \frac{۳ا + ۲ب + ۱ج}{۳ب} = \frac{۵ج + ۲ا + ۳ع}{۵د + ۲ب + ۳ف}$$

$$(۲) \frac{۲ج}{۲ا} = \frac{۵ج + ۳ع + ۲ا}{۵د + ۳ف + ۲ب}$$

$$(۳) \quad \frac{۲\text{ا} + ۳\text{ع} - ۵\text{ف}}{۲\text{ب} + ۳\text{ف} - ۵\text{ه}} = \frac{۲}{۳}$$

۸۔ اگر $\frac{۱}{۱+۱} = \frac{۱}{۱-۱} = \frac{۱}{۱+۱}$ ج تو ثابت کرو کہ $۱ = ۱$ ج + ج

۹۔ اگر $\frac{۱}{۱+۱} = \frac{۱}{۱-۱} = \frac{۱}{۱+۱}$ ج تو ثابت کرو کہ $\frac{۱}{۱} = ۱$ برابر ہے۔

$$\frac{۱\text{ا} + ۲\text{ب} + ۳\text{ج}}{۱\text{ب} + ۲\text{ج} + ۳\text{د}}$$

۱۰۔ اگر $\frac{۱}{۱+۱} = \frac{۱}{۱-۱} = \frac{۱}{۱+۱}$ ی تو ثابت کرو کہ $۱ = ۱$ ی + ی

تو ثابت کرو کہ $(۱-۱) + (۱+۱) + (۱-۱) + (۱+۱) = ۰$

۱۱۔ اگر $\frac{۱}{۱-۱} = \frac{۱}{۱+۱} = \frac{۱}{۱-۱}$ لا تو نسبتیں لا: ما: ی دریافت کرو

۱۲۔ اگر $\frac{۱+۱}{۱+۱} = \frac{۱+۱}{۱+۱} = \frac{۱+۱}{۱+۱}$ ی + لا تو ثابت کرو کہ $۱ = ۱$ ی + لا

تو ثابت کرو کہ $\frac{(۱+۱+۱)}{۱+۱+۱} = \frac{(۱+۱+۱)}{۱+۱+۱}$ ی + لا + ی

۱۳۔ اگر $\frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱}$ ج تو ثابت کرو کہ $\frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱}$ ج

$$\frac{۱\text{ا} + ۲\text{ب} + ۳\text{ج}}{۱\text{ب} + ۲\text{ج} + ۳\text{د}} = \frac{۱\text{ا} + ۲\text{ب} + ۳\text{ج}}{۱\text{ب} + ۲\text{ج} + ۳\text{د}}$$

۱۴۔ اگر $\frac{۱-۱}{۱} = \frac{۱-۱}{۱} = \frac{۱-۱}{۱}$ ج تو ثابت کرو کہ $\frac{۱-۱}{۱} = \frac{۱-۱}{۱} = \frac{۱-۱}{۱}$ ج

تو ثابت کرو کہ $\frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱}$ ج

۱۵۔ اگر $(ل + ب + ج) = (ل + م + ی)$ تو ثابت کرو کہ $ل : ب = ی : ج$

۱۶۔ اگر $ل (م + ن + ی) = م (ل + ن + ی)$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ل + ی - ل - م - ی}{ن} = \frac{ل + ی - ل - م - ی}{ن}$$

۱۷۔ ثابت کرو کہ مساواتوں

$$ل + ل + ج + م + ب + ی = ۰$$

$$ب + ل + ل + ج + ی = ۰$$

کا حاصل اسقاط $ل + ب + ج + ی = ۰$ ہے۔

۱۸۔ ل، م، ی کو مساواتوں

$$ل + ل + م + گ + ی = ۰$$

$$گ + ل + ف + م + ج + ی = ۰$$

۱۹۔ اگر $ل = ج + م + ب + ی$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ل}{ل - ج} = \frac{م}{م - ج} = \frac{ب}{ب - ج} = \frac{ی}{ی - ج}$$

۲۰۔ معلوم ہے $ل (م + ی) = ل (ب + ی)$ اور $ج (ل + م) = ی (ل + م)$

$$ل = م + ی$$

ثابت کرو کہ $ل + ج + ب + ی = ۱$

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:-

$$۲۱۔ ل - م + ی = ۰$$

$$۲۲۔ ل - م + ی = ۰$$

$$۲۳۔ ل - م + ی = ۱$$

$$۲۴۔ ل + م + ی = ۰$$

$$۲۵۔ ل - م + ی = ۰$$

$$۱۶۷ = ۳ا + ۲ما + ۱ی$$

$$۲۳ - ۴ما = ۳ی + ۱لا = ۳لا + ۱ما$$

$$۱۹ = ۳ی + ۲ما + ۱لا$$

$$۰ = ۳ا - ۲لا - ۱ما + ۵ی$$

$$۰ = ۴ما - ۳ا - ۱ی + ۵لا$$

$$۶ = ۴ما + ۳ی - ۵لا$$

$$۲۵ - اگر \quad \frac{ن}{۱ا - ۲ج} + \frac{م}{۲ج - ۱ب} + \frac{ل}{۱ا - ۲ب} = ۰$$

$$اور \quad \frac{ن}{۱ا + ۲ج} + \frac{م}{۲ج + ۱ب} + \frac{ل}{۱ا + ۲ب} = ۰$$

$$تو ثابت کرو کہ \quad \frac{ل}{(۱-ب)(ج-۱ا)} = \frac{م}{(ب-ج)(۱-۱ا)}$$

$$\frac{ن}{(ج-۱ا)(ب-۱ا)} =$$

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:-

$$۲۶ - ۱لا + ۲ب + ۱ج = ۰$$

$$۲ج + ۱لا + ۲ب = ۱ی$$

$$۱ما + ۱ب + ۲ج = (۱لا + ۲ب + ۱ج) = ۱ی$$

$$۲۷ - ۱لا + ۲ب + ۱ج = ۱ی = ۱لا + ۲ب + ۱ج$$

$$۱لا + ۲ب + ۱ج = (ب-ج)(ج-۱ا) = (ب-۱ا)$$

$$۲۸ - اگر ۱(ما+۱ی) = ۱(ب+۱ی) = ۱(ج+۱ا) = ۱(لا+۱ما) = ۱ی$$

$$تو ثابت کرو کہ \quad \frac{۱ا}{(۱-ب)(ج)} = \frac{۱ما}{(ب-۱ا)(ج)} = \frac{۱ی}{(ج-۱ا)(ب)}$$

۲۹۔ اگر لا + ہ + ما + گ ی = ہ + لا + ب + ما + ف ی = .

اور گ لا + ف + ما + ج ی = . تو ثابت کرو

$$(۱) \frac{\text{لا}^۱ - \text{ج}^۱ - \text{ف}^۱}{\text{ب}^۱ - \text{ج}^۱ - \text{گ}^۱} = \frac{\text{ما}^۱}{\text{ج}^۱ - \text{و}^۱ - \text{م}^۱} = \frac{\text{ی}^۱}{\text{و}^۱ - \text{ب}^۱ - \text{م}^۱}$$

$$(۲) (\text{ب}^۱ - \text{ج}^۱ - \text{ف}^۱) (\text{ج}^۱ - \text{و}^۱ - \text{م}^۱) (\text{و}^۱ - \text{ب}^۱ - \text{م}^۱)$$

$$= (\text{ف}^۱ - \text{گ}^۱ - \text{ج}^۱) (\text{گ}^۱ - \text{و}^۱ - \text{م}^۱) (\text{و}^۱ - \text{ب}^۱ - \text{م}^۱)$$



باب دوم

تناسب

۱۸۔ تعریف جب نسبتیں مساوی ہوں تو چار مقدار میر کو جو ان میں شامل

ہوتی ہیں متناسب کہتے ہیں مثلاً $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ تو ا، ب، ج، د

کو متناسب کہیں گے۔ اس ربط کو بعض اوقات یوں بیان کرتے ہیں کہ ا کو ب سے وہی نسبت ہے جو ج کو د سے ہے اور یہ تناسب اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$1 : 2 :: 3 : 6$$

$$یا 1 : 2 = 3 : 6$$

۱ اور د کو طرفین متناسب اور ب اور ج کو وسطین متناسب کہتے ہیں۔

۱۹۔ اگر چار مقدار متناسب ہوں تو طرفین کا حاصل ضرب =

وسطین کا حاصل ضرب۔

فرض کرو کہ ا، ب، ج، د متناسب ہیں

$$بوجب تعریف \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

دونوں طرف ب د سے ضرب دینے سے $1 \times 6 = 2 \times 3$

پس ظاہر ہے کہ اگر کسی تناسب کی تین رقمیں معلوم ہوں تو

چوتھی رقم معلوم ہو سکتی ہے

$$\text{مثلاً اگر ا، ج، د معلوم ہوں تو ب} = \frac{1 \times 6}{3}$$

برعکس اس کے اگر چار مقادیر 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ایسی ہوں کہ
 $ا = ب \times ج$ تو 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' متناسب ہونگے اور ان میں سے 'ا'، 'د'
 طرفین اور 'ب'، 'ج' وسطین ہونگے یا برعکس اس کے۔
 مثال - فرض کرو کہ تناسب کی پہلی تیسری چوتھی رقیں بالترتیب
 $\frac{1}{4}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ ہیں۔ اگر 'ا' سے دوسری رقم کو تعبیر کریں تو $\frac{1}{4} : \frac{2}{3} = لا : \frac{1}{2}$

$$\text{جس سے } لا \times \frac{2}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$$

یعنی $لا = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{16}$
 ۲۰۔ تعریف - مقادیر متناسب مسلسل میں کہلاتی ہیں اگر
 پہلی کو دوسری سے وہی نسبت ہو جو دوسری کو تیسری سے اور تیسری کو
 چوتھی سے ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔

مثلاً 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' تناسب مسلسل میں ہوں گے اگر

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = \dots\dots\dots$$

اگر تین مقادیر متناسب مسلسل میں ہوں تو

$$ا : ب = ب : ج$$

اس صورت میں 'ب' کو وسط تناسب اور 'ج' کو 'ا' اور 'ب' کا
 تیسرا متناسب کہتے ہیں۔

۲۱۔ متناسب مسلسل میں مقادیر کے رشتے -

اگر تین مقادیر 'ا'، 'ب'، 'ج' متناسب مسلسل میں ہوں تو

$$ا : ج = لا : ب = ب : ج \text{ اور } ب = لا \times ج$$

اگر چار مقادیر 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' متناسب مسلسل میں ہوں

$$ا : د = لا : ب = ب : ج = ج : د$$

$$\text{اور } ب = لا \times ج = ج \times د$$

$$\text{کیونکہ } \frac{1}{ب} = \frac{ب}{ج}$$

$$\text{اس لیے } \frac{1}{ب} \times \frac{ب}{ج} = \frac{ب}{ج} \times \frac{ب}{ج}$$

$$\text{جس سے } \frac{1}{ج} = \frac{ب}{ج^2} = \frac{1}{ب} \quad (۱) \dots\dots\dots$$

نیز $اوج = ب$

$$\text{جس سے } ب = اوج \quad (۲) \dots\dots\dots$$

مساوات (۱) اور (۲) سے دو مسائل مندرجہ بالا ثابت ہو گئے۔
نیز اگر $اوج$ ، $ب$ ، $ج$ ، و تناسب مسلسل میں ہوں تو

$$\frac{1}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د}$$

$$\text{اس لیے } \frac{1}{ب} \times \frac{ب}{ج} \times \frac{ج}{د} = \frac{1}{د} \times \frac{1}{ب} \times \frac{1}{ج}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{د} = \frac{1}{ب \times ج}$$

$$\text{اس لیے } \frac{1}{د} = \frac{1}{ب \times ج} = \frac{1}{ج^2} = \frac{1}{د} \quad (۳) \dots\dots\dots$$

$$\text{نیز چونکہ } \frac{1}{د} = \frac{1}{ب^2} \quad \text{اس لیے } ب^2 = د$$

$$\text{جس سے } ب = \sqrt{د} \quad (۴) \dots\dots\dots$$

$$\text{نیز چونکہ } \frac{1}{د} = \frac{1}{ج^2}$$

$$ج^2 = د$$

$$\text{جس سے } ج = \sqrt{د} \quad (۵) \dots\dots\dots$$

نتیجہ (۲) سے ظاہر ہے کہ دو مقادیر ۱ اور ج کے درمیان وسط تناسب کا معلوم کرنا جذر نکالنے پر موقوف ہے۔
مثلاً ۱ اور ۲ کے درمیان وسط تناسب ہے۔

$$1 \times 2 = 2 = \sqrt{2 \times 1} = 1.4142$$

۲۲۔ اگر ۱ : ب = ج : د اور ع : ف = گ : ہ

تو ۱ : ع : ب : ف = ج : گ : ہ : د

چونکہ $\frac{1}{ب} = \frac{ج}{د}$ اور $\frac{ع}{ف} = \frac{گ}{ہ}$

اس لیے $\frac{۱}{ب} = \frac{ع}{ف} = \frac{ج}{د}$

یا ۱ : ع : ب : ف = ج : گ : ہ : د

نتیجہ صریح۔ اگر ۱ : ب = ج : د

اور ب : لا = د : ما

تو ۱ : لا = ج : ما

۲۳۔ اگر چار مقادیر ۱، ب، ج، د متناسب ہوں تو ان سے کئی

اور تناسب کسروں کے خواص کے استعمال سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ اور ان میں سے اکثر منسلک اصطلاحات ہندسیہ سے نامزد ہوتے ہیں۔

(۱) اگر ۱ : ب = ج : د

تو ب : ۱ = د : ج

[عکس نسبت]

کیونکہ $\frac{۱}{ب} = \frac{ج}{د}$ اس لیے $\frac{۱}{ب} = \frac{۱}{د} = \frac{ج}{د}$

یعنی $\frac{۱}{ب} = \frac{ج}{د}$

یا ب : ۱ = د : ج

(۲) اگر ۱ : ب = ج : د

[تبدیل نسبت]

تو ۱: ج = ب: د

چونکہ ۱ د = ب ج اس لیے $\frac{۱}{ج} = \frac{ب}{د}$ یعنی $\frac{۱}{ج} = \frac{ب}{د}$

یا ۱: ج = ب: د

(۳) اگر ۱: ب = ج: د

[ترکیب نسبت]

تو ۱ + ب: ب + ج = د: د

چونکہ $\frac{۱}{ب} = \frac{ج}{د}$ اس لیے $\frac{۱}{ب} + ۱ = \frac{ج}{د} + ۱$ یعنی $\frac{۱+ب}{ب} = \frac{ج+د}{د}$

یا ۱ + ب: ب + ج = د: د

(۴) اگر ۱: ب = ج: د

[تفصیل نسبت]

تو ۱ - ب: ب - ج = د: د

چونکہ $\frac{۱}{ب} = \frac{ج}{د}$ اس لیے $\frac{۱}{ب} - ۱ = \frac{ج}{د} - ۱$ یعنی $\frac{۱-ب}{ب} = \frac{ج-د}{د}$

یا ۱ - ب: ب - ج = د: د

(۵) اگر ۱: ب = ج: د

تو ۱ + ب: ب + ج = د: د

نتیجہ (۳) سے $\frac{۱+ب}{ب} = \frac{ج+د}{د}$ ایضاً (۴) سے $\frac{۱-ب}{ب} = \frac{ج-د}{د}$

$$\text{اس لیے عمل تقسیم سے} \quad \frac{1+b}{1-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\text{یا } 1+b : 1-b = c+d : c-d$$

۲۴۔ دفعہ ما قبل کے نتیجے اقلیدس کے پانچویں مقالہ کے بعض مسئلوں کے جبریہ معادل ہیں اور طالب علم کو چاہیے کہ لفظوں میں ان کو بخوبی بیان کر سکے مثلاً تفصیل نسبت کو اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے :-
اگر چار مقداریں متناسب ہوں تو پہلی کی جو زیادتی دوسری پر ہے اس کو دوسری مقدار سے وہی نسبت ہوگی جو چوتھی مقدار کے اوپر تیسری کی زیادتی کو چوتھی مقدار کے ساتھ ہے۔

۲۵۔ اب ہم تناسب کی جبریہ تعریف کا اقلیدس کی تعریف تناسب سے مقابلہ کریں گے۔ اقلیدس کی تعریف یہ ہے۔

دی ہوئی چار مقداریں اگر پہلی اور تیسری مقدار کے کوئی مساوی ضعف لئے جائیں اور نیز دوسری اور چوتھی مقدار کے کوئی مساوی ضعف لئے جائیں اور اگر تیسری مقدار کا ضعف چوتھی مقدار کے ضعف سے بڑا ہو یا برابر ہو یا چھوٹا ہو بمطابق اس کے کہ پہلی مقدار کا ضعف دوسری مقدار کے ضعف سے بڑا ہے یا برابر ہے یا چھوٹا ہے تو دی ہوئی چار مقداریں متناسب کہلاتی ہیں۔

جبریہ علامات میں یہ تعریف اس طرح بیان ہوگی۔
چار مقداریں ۱، ب، ج، د متناسب ہوں گی اگر

$$c \leq d \text{ بمطابق اس کے کہ } f \leq 1 \leq c \text{، اس میں } f$$

اور ق کوئی مثبت صحیح اعداد ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ ہمیں تناسب کی تعریف جبریہ سے تعریف ہندسیہ حاصل کرنی ہے۔

$$\text{چونکہ } \frac{1}{b} = \frac{c}{d} \text{ اس لیے طرفین کو } \frac{1}{c} \text{ سے ضرب دینے سے حاصل}$$

ہوگا $\frac{ف}{ق} = \frac{ف}{ق} = \frac{ف}{ق}$ اس لیے کسروں کے خواص سے

$ف > ق$ بمطابق اس کے کہ $ف > ق$ جس سے ہمارا دعویٰ ثابت ہے۔

(۲) فرض کرو ہمیں تناسب کی تعریف جبریہ تعریف ہندسیہ سے

حاصل کرنی ہے معلوم ہے $ف > ق$ بمطابق اس کے کہ $ف > ق$ اور ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $\frac{ف}{ق} = \frac{ف}{ق}$

اگر کسور $\frac{ف}{ق}$ اور $\frac{ف}{ق}$ برابر نہ ہوں تو ان میں سے کوئی ایک دوسری سے بڑی ہوگی۔ فرض کرو کہ $\frac{ف}{ق} < \frac{ف}{ق}$ تو اس صورت میں ایک ایسی کسر $\frac{ف}{ق}$ دریافت ہو سکتی ہے جو $\frac{ف}{ق}$ اور $\frac{ف}{ق}$ کے درمیان واقع ہو جہاں $ف$ اور $ق$ مثبت صحیح عدد ہیں۔

اس لیے $\frac{ف}{ق} < \frac{ف}{ق}$ (۱)

اور $\frac{ف}{ق} > \frac{ف}{ق}$ (۲)

بموجب (۱) $ف < ق$

اور بموجب (۲) $ف > ق$ اور جو کچھ ہم نے فرض کیا تھا یہ اس کے خلاف ہے۔

اس لیے $\frac{ف}{ق}$ اور $\frac{ف}{ق}$ غیر مساوی نہیں ہیں یعنی

$\frac{ف}{ق} = \frac{ف}{ق}$ جس سے ہمارا دعویٰ ثابت ہے۔

۲۶- اس بات کا خیال رکھنا چاہیے کہ تناسب کی تعریف ہندسیہ کا

تعلق مقادیر مقرون سے ہے جیسے خطوط، رقبے، وغیرہ جو ہندسی طرفت پر تبصرہ کیے گئے ہوں مگر جن کی پیمائش میں ناپ کی کسی مشترک اکائی کا حوالہ نہ ہو اس لیے اقلیدس کی تعریف مقادیر متبائن اور متوافق دونوں پر حاوی ہے مگر تعریف جبریہ اگر صحیح طور پر بیان کی جائے تو صرف مقادیر متوافق پر ہی صادق آتی ہے کیونکہ اس کے بموجب سب سے پہلے یہ مان لینا پڑتا ہے کہ مقدار $\frac{1}{a}$ مقدار $\frac{1}{b}$ کا وہی معین حصہ یا حصے یا ضعف ہے جو $\frac{1}{c}$ مقدار $\frac{1}{d}$ کا ہے، لیکن وہ سب ثبوت جو ہم نے متوافق مقادیر کے لیے دیے ہیں متبائن مقادیر کے لیے بھی درست ہیں کیونکہ جیسا کہ ہم دفعہ ۱ میں بتا چکے ہیں ہمیشہ دو صحیح عدد ایسے معلوم کیے جاسکتے ہیں کہ ان کی نسبت اور دو متبائن مقداروں کی نسبت کا تفاوت کسی اختیاری مقدار سے کم ہو۔ اس کو زیادہ عام طور پر دفعہ ۱ بعد میں ثابت کیا جائے گا۔

۲۷- فرض کرو کہ $\frac{1}{a}$ اور $\frac{1}{b}$ دو مقادیر متبائن ہیں، مقدار $\frac{1}{c}$ کو m

مساوی حصوں میں تقسیم کر دین میں سے ہر ایک حصہ $\frac{1}{m}$ کے مساوی ہو۔ پس $\frac{1}{a} = m$ بہ جہاں m مثبت صحیح عدد ہے۔ نیز فرض کرو کہ $\frac{1}{b}$ مقدار $\frac{1}{n}$ میں n سے زیادہ دفعہ اور $n + 1$ سے کم دفعہ شامل ہے

تب $\frac{1}{a}$ بڑا ہوگا $\frac{n}{m}$ سے اور چھوٹا ہوگا $\frac{(n+1)}{m}$ سے یعنی $\frac{1}{a}$

کسروں $\frac{n}{m}$ اور $\frac{n+1}{m}$ کے درمیان واقع ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ $\frac{1}{a}$ اور $\frac{1}{b}$ کا فرق $\frac{1}{m}$ سے کم ہے اور چونکہ ہم یہ کہہ چکے ہیں کہ $\frac{1}{a}$ کی اکائی

(ہے) اتنا چھوٹا لے سکتے ہیں جتنا ہم چاہیں اس لیے ہم m کو جتنا بڑا چاہیں بنا سکتے

ہیں، پس $\frac{1}{m}$ جتنا چھوٹا چاہیں بنایا جاسکتا ہے اور دو صحیح اعداد n

اور m ایسے معلوم کیے جاسکتے ہیں کہ ان کی نسبت $\frac{1}{a}$ اور $\frac{1}{b}$ کی نسبت کو کسی مطلوبہ درجہ صحت تک بیان کرے۔

۲۸۔ اس باب کو ہم امثلہ ذیل کے حل پر ختم کریں گے، بعض اوقات خاص قسم کی مساواتوں کا حل ترکیب اور تفصیل نسبت کے قاعدہ کے مناسب استعمال سے آسانی حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال (۱) اگر $(۱م۲ + ۶مب + ۳ن۳ + ۹ن۹)$ \times $(۱م۲ - ۶مب - ۳ن۳ + ۹ن۹)$ $=$ $(۱م۲ - ۶مب + ۳ن۳ - ۹ن۹)$ \times $(۱م۲ + ۶مب - ۳ن۳ + ۹ن۹)$ تو ثابت کرو کہ 'ب'، 'ج' و 'ن' تناسب میں ہیں۔

$$\begin{array}{r} ۱م۲ + ۶مب + ۳ن۳ + ۹ن۹ \\ \hline ۱م۲ - ۶مب + ۳ن۳ - ۹ن۹ \\ \hline ۱م۲ + ۶مب - ۳ن۳ - ۹ن۹ \\ \hline ۱م۲ - ۶مب - ۳ن۳ + ۹ن۹ \end{array} =$$

چونکہ

$$\frac{(۱م۲ + ۶مب + ۳ن۳ + ۹ن۹)^۲}{(۱م۲ - ۶مب + ۳ن۳ - ۹ن۹)^۲} = \frac{(۱م۲ - ۶مب - ۳ن۳ + ۹ن۹)^۲}{(۱م۲ + ۶مب - ۳ن۳ - ۹ن۹)^۲}$$

$$\frac{۱م۲ + ۶مب + ۳ن۳ + ۹ن۹}{۱م۲ - ۶مب + ۳ن۳ - ۹ن۹} = \frac{۱م۲ - ۶مب - ۳ن۳ + ۹ن۹}{۱م۲ + ۶مب - ۳ن۳ - ۹ن۹}$$

تبدیل نسبت سے

$$\frac{۱م۲}{۱۸ن۹} = \frac{۱م۲}{۶ن۳}$$

دوبارہ ترکیب اور تفصیل نسبت سے

$$\frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۳} \text{ یا } ۱:۳ = ۱:۶$$

جس سے $\frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۳}$ یا $۱:۳ = ۱:۶$

$$\text{مثال (۲) مساوات } \frac{۱-لا۴}{۲} = \frac{۱+لا۴}{۱-لا۴} + \frac{۱+لا۴}{۱+لا۴}$$

کو حل کرو

$$\frac{۱+لا۴}{۳-لا۴} = \frac{۱+لا۴}{۱-لا۴}$$

ترکیب اور تفصیل نسبت سے حاصل ہوگا

$$\text{اس لیے } \frac{1+ل+۱۶}{۱-ل} = \frac{۱+ل+۸+ل+۱۶}{۹+ل+۲۴-ل+۱۶}$$

$$\text{پھر ترکیب اور تفصیل نسبت سے } \frac{۱۰+ل+۱۶-ل+۳۲}{۸-ل+۳۲} = \frac{ل+۲}{۲}$$

$$\text{اس لیے ل} = \frac{۵+ل+۸-ل+۱۶}{۴-ل+۱۶}$$

$$\text{جس سے } ۵+ل+۸-ل+۱۶ = ۴-ل+۱۶$$

$$\text{اس لیے ل} = \frac{۵}{۴}$$

امثلہ نمبری (۲)

۱۔ اعداد ۳، ۵، ۲ کا چوتھا متناسب دریافت کرو۔

۲۔ وسط متناسب دریافت کرو۔

(۱) ۶ اور ۲ کے درمیان

(۲) ۳۶۰ اور ۲۵ کے درمیان

۳۔ $\frac{ل}{۱} + \frac{ل}{۱} = \frac{ل}{۱}$ اور $\frac{ل}{۱}$ کا تیسرا متناسب دریافت کرو۔

اگر ل:ب = ج:د تو ثابت کرو کہ

۴۔ ل:ج + ل:ج = ب:د + ب:د = (ل+ج): (ب+د)

۵۔ ف:ل + ق:ب = ف:ل - ق:ب = ف:ج + ق:ج = ف:ج - ق:ج

۶۔ ل:ج - ب:د = ل:ج + ج:ل = ب:د + د:ب

۷۔ ل:ج + ج:ل = ب:د + د:ب = ل:ج + ج:ل = ب:د + د:ب

اگر ل:ب، ج:د متناسب مسلسل میں ہوں تو ثابت کرو کہ

۸۔ ل:ب + ب:د = ج:د + د:ج

$$۹ - ۲ + ۱ = ۳ : ۳ - ۱ = ۲ + ۲ = ۴ : ۲ - ۱ = ۳ - ۲$$

$$۱۰ - (۲ + ۱ + ۳) = (۲ + ۱ + ۳) = (۲ + ۱ + ۳) = (۲ + ۱ + ۳)$$

۱۱ - اگر ل اور ج کا وسط تناسب ب ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۲ - ۱ + ۳}{۲ - ۱ + ۳} = \frac{۲ - ۱ + ۳}{۲ - ۱ + ۳}$$

۱۲ - اگر ل : ب = س : د اور ج : ف = گ : ح تو ثابت کرو کہ
ل + ج : ب + ف = ل + ج : ب + ف = س + گ : د + ح

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$۱۳ - \frac{۱۳ - ۱۱ + ۱۲}{۱۳ - ۱۱ + ۱۲} = \frac{۱۳ - ۱۱ + ۱۲}{۱۳ - ۱۱ + ۱۲}$$

$$۱۴ - \frac{۳ + ۱۱ - ۱۲}{۳ + ۱۱ - ۱۲} = \frac{۳ + ۱۱ - ۱۲}{۳ + ۱۱ - ۱۲}$$

$$۱۵ - \frac{(۳ + ۱۱ - ۱۲)}{(۳ + ۱۱ - ۱۲)} = \frac{(۳ + ۱۱ - ۱۲)}{(۳ + ۱۱ - ۱۲)}$$

۱۶ - اگر ل : ب = ج : د، متناسب ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{(۳ + ۱۱ - ۱۲)}{(۳ + ۱۱ - ۱۲)} = \frac{(۳ + ۱۱ - ۱۲)}{(۳ + ۱۱ - ۱۲)}$$

۱۷ - اگر ل : ب = ج : د، متناسب مسلسل ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{(۳ + ۱۱ - ۱۲)}{(۳ + ۱۱ - ۱۲)} = \frac{(۳ + ۱۱ - ۱۲)}{(۳ + ۱۱ - ۱۲)}$$

۱۸ - اگر ل : ب = ج : د، متناسب کے ل + ا دن کے کام کی نسبت ل + ۲ شخصوں

کے ل + ۱ دن کے کام سے ۹ : ۱۰ ہو تو لا معلوم کرو۔

۱۹ - ایسے چار متناسب اعداد معلوم کرو جن کی طرفین کا مجموعہ ۲۱ ہو

وسطین کا مجموعہ ۱۹ اور ان سب کے مربعوں کا مجموعہ ۲۲ ہو۔

۲۰ - دو طرف ل اور ب ہیں۔ ان میں دو مختلف قسم کی شرابوں کے

آمیزے بھرے گئے ہیں اور ان کی نسبت ۲ : ۱ ہے اور ب میں ۱ : ۵ ہر ایک طرف

کتنی کتنی مقدار میں مختلف آمیزوں کی لی جائیں کہ ایک نیا آمیزہ بن جائے جس میں ۲ گیلن پہلی قسم کی شراب کے اور ۹ گیلن دوسری کے شامل ہوں۔

۲۱۔ ایک ظرف شراب سے پُر ہے، اس میں سے ۹ گیلن نکالے گئے ہیں اور اُسے پانی سے بھر دیا گیا ہے پھر آمیزہ کے ۹ گیلن نکالے گئے ہیں اور ظرف کو پانی سے بھر دیا گیا ہے اگر ظرف میں اس وقت شراب اور پانی کی نسبت ۱۶:۹ ہو تو معلوم کرو کہ اس ظرف کی کل گنجائش کتنی ہے۔

۲۲۔ اگر چار مثبت مقادیر تناسب مسلسل میں ہوں تو ثابت کرو کہ پہلی اور آخری مقدار کا فرق باقی دو مقداروں کے فرق کا کم از کم تین گنا ہے۔

۲۳۔ انگلستان میں ۱۸۷۵ء سے لے کر ۱۸۸۱ء تک آبادی ۱۵.۹ فیصد بڑھی۔ اگر قصبائی آبادی ۸ فیصدی اور دیہاتی آبادی ۴ فیصدی بڑھی ہو تو ۱۸۷۵ء میں قصبائی اور دیہاتی آبادیوں کا مقابلہ کرو۔

۲۴۔ کسی ملک میں چائے کا صرفہ قہوہ سے ۵ گنا زیادہ ہے اگر ۱ فی صدی زیادہ چائے اور ۱ فی صدی زیادہ قہوہ صرفہ ہوتا تو کل مقدار صرف شدہ چائے ۳ فی صدی زیادہ ہوتی۔ لیکن اگر ۱ فی صدی زیادہ چائے اور ۱ فی صدی زیادہ قہوہ استعمال ہوتا تو کل مقدار استعمال شدہ چائے ۳ فی صدی زیادہ ہوتی۔ اور یہ اس کا مقابلہ کرو۔

۲۵۔ پتیل کی ترکیب میں حبستہ اور تانبے کی آمیزش ہے گانے میں ۱۰ فی صدی تانبہ ۴ فی صدی حبستہ اور ۱۱ فی صدی قلعی شامل ہے۔ کسی پتیلے ہوئے پتیلے اور گانے کے مرکب میں ۴ فی صدی تانبہ اور ۱۱ فی صدی حبستہ اور ۱۱ فی صدی قلعی پانی گئی پتیل کی ترکیب میں تانبے اور حبستہ کی نسبت معلوم کرو۔

۲۶۔ چند طراح کشتی کو ایک غاص فاصلہ تک بہاؤ کے خلاف ۴ منٹ میں لے جاسکتے ہیں اور بہاؤ کے رخ میں اسی فاصلہ کو کھڑے پانی کی نسبت ۹ منٹ کے عرصہ میں طے کر لیتے ہیں معلوم کرو کہ بہاؤ کے رخ میں اسی فاصلہ کو کتنی دیر میں طے کر لیں گے۔

باب سوم

تغیر

۲۹۔ تعریف۔ جب کہا جائے کہ ایک مقدار ما بالراست ایسے بدلتی ہے جیسے ایک دوسری مقدار لا تو اس سے یہ مراد ہوتی ہے کہ دو مقادیر ایک دوسرے پر اس طرح موقوف ہیں کہ اگر لا کو بدلا جائے تو ما بھی اسی نسبت سے بدلے گا۔
نوٹ۔ لفظ ”بالراست“ کو اکثر حذف کرتے ہیں اور صرف یہی کہتے ہیں کہ

ما ایسا بدلتا ہے جیسا لا۔

اس قسم کے تغیر کی مثال یہ ہے کہ اگر ایک ریل گاڑی یکساں رفتار سے ۴ منٹ میں ۴۰ میل جا رہی ہو تو وہ ۳ منٹ میں ۲۰ میل اور ۱۲ منٹ میں ۸۰ میل جائے گی وغیرہ وغیرہ، ہر ایک صورت میں طے کردہ فاصلہ اسی نسبت سے بڑھتا ہے یا گھٹتا ہے جیسے وقت۔ اسے اکثر یوں بیان کرتے ہیں کہ جب رفتار یکساں ہو تو فاصلہ متناسب ہوتا ہے وقت کے یا فاصلہ ایسے بدلتا ہے جیسے وقت۔

۳۰۔ رمز ∞ تغیر کو تعبیر کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ پس ما ∞ لا کو اس طرح پڑھتے ہیں ”ما ایسے بدلتا ہے جیسے لا۔“
۳۱۔ اگر ما ایسا بدلتا ہو جیسا لا تو ما ایک مستقل مقدار اور لا کے

حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ 'ما'، 'ما'، 'ما'، 'ما' اور 'لا'، 'لا'، 'لا'، 'لا'
متناظر قیمتیں 'ما' اور 'لا' کی ہیں۔

بموجب تعریف $\frac{لا}{ما} = \frac{لا}{ما}$ ، $\frac{لا}{لا} = \frac{ما}{ما}$ اور علیٰ ہذا القیاس

..... $\frac{ما}{لا} = \frac{ما}{لا} = \frac{ما}{لا} = \frac{ما}{لا}$ ، چونکہ ہر ایک $\frac{ما}{لا}$ کے برابر ہے

اس لیے $\frac{ما کی کوئی قیمت}{لا کی متناظر قیمت}$ ہمیشہ وہی رہتی ہے

یعنی $\frac{ما}{لا} = م$ جہاں م مقدار مستقل ہے۔

..... $ما = م لا$ (۱)

اگر 'ما' اور 'لا' کی متناظر قیمتوں کا کوئی زوج معلوم ہو تو مساوات (۱) سے مقدار مستقل م کی قیمت حاصل ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ $ما = ۳$ جبکہ $لا = ۱۲$ تو $۳ = م \times ۱۲$

اس لیے $م = \frac{۳}{۱۲}$ اور $ما = \frac{۱}{۴} لا$

مثال۔ کسی دائرہ کا محیط ∞ قطر

..... $\frac{محیط}{قطر} = ایک مستقل مقدار$

یہ مقدار π سے تعبیر ہوتی ہے اور اس کی تقریبی قیمت ۳.۱۴۱۵۹

ہے۔ اس لیے محیط ۲π جہاں ر نصف قطر ہے، اس میں π عبرانی حرف "حیت" ہے۔

۳۲۔ اگر ایک مقدار 'ما' اس طرح بدلے جیسے 'لا' کا متکافی یا الٹ

تو اسے ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ 'ما' بالعکس ایسے بدلتا ہے جیسے 'لا'

پس اگر 'ما' بالعکس ایسے بدلے جیسے 'لا' تو $\frac{ما}{لا} = م$ جہاں م ایک مستقل

ہے۔ تغیر معکوس کی توضیح کے لیے ایک مثال مندرجہ ذیل ہے۔

اگر ۶ آدمی ایک کام کو ۸ گھنٹہ میں کرتے ہوں تو ۱۲ آدمی اسی کام کو ۴ گھنٹے میں اور ۲ آدمی ۲۴ گھنٹے میں کرینگے اور علیٰ ہذا القیاس۔
 اس سے ظاہر ہے کہ اگر آدمیوں کی تعداد بڑھا دی جائے تو وقت اسی نسبت سے گھٹ جائیگا۔ اور برعکس اس کے۔
 مثال (۱) فرض کرو کہ لا کا جذرا مکعب ما کے مربع کے باعکس بدلتا ہے۔
 اگر لا = ۸ جبکہ ما = ۳ تو لا معلوم کرو جبکہ ما = $\frac{1}{8}$
 بموجب مفروض $\frac{3}{8} = \frac{م}{لا}$ جہاں م ایک مقدار مستقل ہے
 اس مساوات میں لا = ۸ اور ما = ۳ رکھنے سے

$$\frac{3}{8} = \frac{م}{لا} \therefore م = ۱۸ \text{ اور } \frac{3}{8} = \frac{۱۸}{لا}$$

اس لیے ما = $\frac{3}{8}$ رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے لا = ۵۱۲
 مثال (۲) کسی سیارہ کی گردش کے وقت کا مربع ایسا بدلتا ہے جیسا کہ مکعب اس فاصلہ کا جو سیارہ اور سورج کے درمیان ہو۔ اگر فرض کیا جائے کہ زمین اور زہرہ (وینس) کے فاصلے سورج سے جداگانہ ۹۱۲۵۵ اور ۶۶۰ لاکھ میل ہیں تو زہرہ کی گردش کا وقت دریافت کرو۔
 فرض کرو کہ ایک گردش کا وقت ت ہے دنوں میں اور د فاصلہ ہے لاکھ میلوں میں۔

بموجب مفروض $\frac{۳}{۸} = \frac{د}{ت}$
 یا $\frac{۳}{۸} = \frac{د}{ت}$ جہاں ک مقدار مستقل ہے پس زمین کے لیے

$$۹۱۲۵۵ \times ۹۱۲۵۵ \times ۹۱۲۵۵ \times ک = ۳۶۵ \times ۳۶۵$$

$$\frac{۳۶۵ \times ۳۶۵}{۹۱۲۵۵ \times ۹۱۲۵۵ \times ۹۱۲۵۵} = \text{جس سے ک}$$

$$\frac{۳(۱۰)}{۳(۲۵) \times ۳۶۵} = \frac{۱}{۳(۲۵) \times ۳۶۵} =$$

$$\text{اس لیے ت}^2 = \frac{{}^3(10)}{{}^3(25) \times 365} \times 3$$

$$\text{زہرہ کے لیے ت}^2 = \frac{{}^3(10)}{{}^3(25) \times 365} \times {}^3(440)$$

$$\frac{{}^3(44) \times 3}{{}^3(25) \times 365} = \frac{{}^3(44) \times {}^3(10)}{{}^3(25) \times 365}$$

$$\text{اس لیے ت} = \sqrt{\frac{244}{365}} \times 44 \times 3 =$$

$$= \sqrt{0.585} \times 244 =$$

$$= 222.5$$

$$= 222.5$$

اس لیے زہرہ کی گردش کا وقت تقریباً ۲۲۲ دن ہے۔

۳۳۔ اگر ایک مقدار اس طرح بدلے جس طرح کہ دو یا زیادہ مقداروں کا حاصل ضرب تو ہم کہتے ہیں کہ پہلی مقدار بالاشتراك ایسے بدلتی ہے جیسے دوسری مقداریں۔

اگر بدلتا ہے بالاشتراك لا اور ما کے تو = م لا ما جہاں م مقدار مستقل ہے۔

مثلاً کسی رقم کا سود بدلتا ہے بالاشتراك اصل زر اور مدت اور شرح فی صدی کے۔

۳۴۔ تعریف۔ جب ی ایسے بدلے جیسے لا تو ہم یوں کہتے

ہیں کہ ی بالراست ایسے بدلتا ہے جیسے لا اور بالعکس ایسے بدلتا ہے جیسے ما۔

۳۵۔ اگر ی لا جبکہ ما مستقل ہو اور ی لا جبکہ ما مستقل ہو

تو ی لا ما جبکہ لا اور ما دونوں بدلیں۔

ثبوت۔ نظام ذیل میں متخیرات کی متناظر قیمتوں پر خیال کرو اس جگہ ی صرف لا اور ما پر موقوف ہے اور اگر ی لا جبکہ ما مستقل ہو اور

اور، دونوں بے بسی!

متغیر متبوع	متغیر تابع
لا، لاء	ی
لَا، لَاء	ی
لَا، لَاء .	نئی

اس لیے جو جب شرائط سوال $\frac{y}{x} = \frac{L}{N}$

اس لیے $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

اب ان مساواتوں سے $\frac{y}{y_1} \times \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_1} \times \frac{y_1}{y_2}$

یعنی $\frac{y}{x} = \frac{L_1}{L_2}$ جس سے ثابت ہوتا ہے کہ $y \propto L_1$

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ی موقوف ہو لا، لپ، لام..... لان پر

اور صرف انہیں مقادیر پر پوری ایسا بدلتا ہو جیسا کہ ان مقادیر میں سے کوئی ایک مقدار جبکہ باقی مقادیر مستقل فرض کی جائیں تو

[illegible]

۳۶۔ دفعہ گزشتہ میں جو مسئلہ ثابت کیا گیا ہے اس کی چند مثالیں

ذیل میں مستدرج ہیں۔

اگر مزدوروں کی تعداد معین ہو تو ان کے کام کی مقدار ایسے بدلتی ہے جیسے ان دنوں کی تعداد جتنے دن انہوں نے کام کیا ہو اور کسی معینہ وقت میں کام کی مقدار ایسے بدلتی ہے جیسے مزدوروں کی تعداد۔ اس لیے جب دنوں کی تعداد اور مزدوروں کی تعداد دونوں بدلیں تو کام کی مقدار اس طرح بدلیگی جس طرح کہ دنوں کی تعداد اور مزدوروں کی تعداد کا حاصل ضرب۔

علم ہندسہ میں مثلث کا رقبہ \propto قاعدہ جبکہ ارتفاع مستقل ہو اور رقبہ \propto ارتفاع جبکہ قاعدہ مستقل ہو۔ پس رقبہ \propto قاعدہ \times ارتفاع جبکہ قاعدہ اور ارتفاع دونوں بدلیں۔

مثال (۱) ایک قائم مخروط مستدیر کا حجم \propto نصف قطر کا مربع جبکہ ارتفاع مستقل ہو اور \propto ارتفاع جبکہ قاعدہ مستقل ہو۔ اگر قاعدہ کا نصف قطر ۱۵ فٹ ہو اور ارتفاع ۱۵ فٹ تو حجم ۱۱۲۲ مکعب فٹ ہوتا ہے ایک ایسے مخروط کا ارتفاع معلوم کرو جس کا حجم ۱۳۲ مکعب فٹ ہو اور جس کے قاعدہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہو۔

فرض کرو کہ ع اور ر جدا گانہ مخروط کے ارتفاع اور قاعدہ کے نصف قطر کو فٹوں میں تعبیر کرتے ہیں۔

$$\text{بموجب مفروض } ۱۱۲۲ = ۱۵ \times ۱۵ \times م$$

$$\text{جس سے } م = \frac{۲۲}{۲۱}$$

$$\text{اس لیے حجم} = \frac{۲۲}{۲۱} \times ۱۵$$

$$\text{اس لیے حجم} = ۱۳۲ \text{ اور } ۳ = ر \text{ کہنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے}$$

$$۱۳۲ = \frac{۲۲}{۲۱} \times ۹ \times ع \text{ جس سے } ع = ۱۴$$

اس لیے ارتفاع مطلوب ۱۴ فٹ ہے۔

۳۷۔ دفعہ ۳۵ کے مسئلہ کی تہیم اس صورت تک بھی کی جاسکتی ہے

جبکہ ی کا تغیر دو سے زیادہ متغیروں پر منحصر ہو۔ مزید برآں تغیر بالراست

یا معکوس ہو سکتا ہے۔ یہ اصول دھچپ ہے کیونکہ یہ طبیعیات میں بکثرت استعمال ہوتا ہے مثلاً گیسوں کے نظریہ میں تجربہ سے یہ معلوم کیا گیا ہے کہ کسی گیس کا دباؤ د ایسے بدلتا ہے جیسے "مطلق تپش" ت جبکہ حجم مستقل ہو اور دباؤ بالعکس ایسے بدلتا ہے جیسے حجم جبکہ تپش مستقل ہو یعنی $\propto \frac{1}{V}$ جبکہ $\propto T$ مستقل ہو۔

اور $\propto \frac{1}{V}$ جبکہ $\propto T$ مستقل ہو۔

ان نتائج سے حاصل ہوتا ہے کہ جب ت اور ح دونوں بدلیں تو $\propto \frac{1}{V}$ یا $\propto T$ = ک ت جہاں ک مستقل ہے اور تجربہ کرنے سے اس کی تصدیق ہوتی ہے۔

مثال - ایک ریل کے سفر کی مدت بالراست ایسے بدلتی ہے جیسے فاصلہ طے شدہ اور بالعکس ایسے بدلتی ہے جیسے رفتار اور رفتار بالراست ایسے بدلتی ہے جیسے ایک میل میں صرف شدہ کوئلہ کی مقدار کا جذر اور بالعکس ایسے بدلتی ہے جیسے ڈبوں کی تعداد۔

۸ ڈبوں کے ساتھ نصف گھنٹہ میں ۲۵ میل طے کرنے کے لیے ۱۰ ہنڈرڈ ویٹ کوئلہ صرف ہوتا ہے بتاؤ کہ ۱۶ ڈبوں کے ساتھ ۲۸ منٹ میں ۲۱ میل کا سفر طے کرنے کے لیے کتنا کوئلہ درکار ہوگا۔
فرض کرو کہ ت تعبیر کرتا ہے وقت کو گھنٹوں میں۔

اور د = بعد کو میلوں میں

اور ر = رفتار فی گھنٹہ میلوں میں

اور ق = کوئلہ صرف شدہ فی میل ہنڈرڈ ویٹوں میں

اور ن = ڈبوں کی تعداد کو تعبیر کرتا ہے۔

تو بموجب شرائط سوال

$$\begin{aligned} & \text{ت} \propto \frac{د}{ر} \\ & \text{اور} \quad \text{ر} \propto \frac{\text{ماق}}{ن} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{جس سے} \quad \text{ت} \propto \frac{ن}{\text{ماق}} \\ & \text{یات} = \frac{\text{ک} \cdot \text{ن}}{\text{ماق}} \text{ جہاں ک مستقل ہے} \end{aligned}$$

اس مساوات میں اوپر دی ہوئی قیمتیں درج کرنے سے (چونکہ $ق = \frac{۱}{۲۵}$)

$$\frac{۵ \times ۲۵ \times ۱۸ \times \text{ک}}{۱۰۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۱۰۶}{۳۶ \times ۱۲۵} = \text{یعنی ک}$$

$$\text{اس لیے ت} = \frac{۱۰۶ \cdot \text{ن}}{۳۶ \times ۱۲۵}$$

اب ت، ن، د کی قیمتیں جو سوال کے دوسرے حصے میں دی ہوئی ہیں درج کرنے سے

$$\frac{۲۱ \times ۱۶ \times ۱۰۶}{۳۶ \times ۱۲۵} = \frac{۲۸}{۹}$$

$$\text{یعنی ماق} = \frac{۲۱ \times ۱۶ \times ۱۰۶}{۲۸ \times ۷۵} = \frac{۴}{۲۵}$$

$$\text{جس سے ق} = \frac{۳۲}{۱۲۵}$$

$$\text{اس لیے کوئلہ کی مقدار مطلوبہ} = \frac{۳۲ \times ۲۱}{۱۲۵} = \frac{۴۴}{۱۲۵} \text{ ۵ ہنڈرڈ ویٹ}$$

امثلہ نمبری (۳)

۱۔ اگر لا ایسے بدلتا ہو جیسے ما اور لا = ۸ جبکہ ما = ۵ تو لا دریافت کرو۔

- جبکہ $ما = ۱۰$
- ۲۔ اگر $ق$ بالکس ایسے بدلتا ہو جیسے $ق$ اور $ف = ۳$ جبکہ $ق = ۳$
- تو $ف$ معلوم کرو جبکہ $ق = \frac{۱}{۳}$
- ۳۔ اگر $لا$ کا مربع ایسے بدلتا ہو جیسے $ما$ کا مکعب اور $لا = ۳$ جبکہ $ما = ۴$
- تو $ما$ کی قیمت دریافت کرو جبکہ $لا = \frac{۱}{۳}$
- ۴۔ $ا$ ایسے بدلتا ہے جیسے $ب$ اور $ج$ بالاشتراك، اگر $ا = ۲$ جبکہ
- $ب = \frac{۳}{۵}$ اور $ج = \frac{۲}{۳}$ تو $ج$ کی قیمت معلوم کرو جبکہ $ا = ۵$ اور $ب = ۳$
- ۵۔ اگر $ا$ ایسے بدلتا ہو جیسے $ج$ اور $ب$ ایسے بدلتا ہو جیسے $ج$
- تو $ا + ب$ اور $ا + ب$ ایسے بدلیں گے جیسے $ج$
- ۶۔ اگر $ا$ ایسے بدلتا ہو جیسے $ب$ ج تو $ب$ بالکس ایسے بدلیگا
- جیسے $ج$
- ۷۔ $ف$ بالراست ایسے بدلتا ہے جیسے $ق$ اور بالکس ایسے
- بدلتا ہے جیسے $ر$ نیز $ف = \frac{۲}{۳}$ جبکہ $ق = \frac{۳}{۵}$ اور $ر = \frac{۹}{۱۴}$ تو $ق$ معلوم
- کرو جبکہ $ف = \frac{۸}{۱۴}$ اور $ر = \frac{۵}{۱۴}$
- ۸۔ اگر $لا$ ایسے بدلتا ہو جیسے $ما$ تو ثابت کرو کہ $لا + ما$ ایسے بدلیگا
- جیسے $لا - ما$
- ۹۔ اگر $ما$ ایسے بدلتا ہو جیسے دو متغادیر کا مجموعہ جن میں سے ایک
- مقدار بالراست ایسے بدلتی ہے جیسے $لا$ اور دوسری بالکس ایسے بدلتی ہے
- جیسے $لا$ اور اگر $ما = ۶$ جبکہ $لا = ۴$ اور $ما = \frac{۱}{۳}$ جبکہ $لا = ۳$ تو $لا$ اور $ما$ کے
- باہمی ربط کو مساوات کی صورت میں بیان کرو۔
- ۱۰۔ اگر $ما$ دو ایسی متغادیر کے مجموعہ کے برابر ہو جن میں سے ایک
- مقدار بالراست ایسے بدلتی ہو جیسے $لا$ اور دوسری بالکس ایسے بدلتی ہو
- جیسے $لا$ اور اگر $ما = ۹$ جبکہ $لا = ۲$ یا ۳ تو $ما$ کو $لا$ کی رقوم میں دریافت کرو۔
- ۱۱۔ اگر $ا$ بالراست ایسے بدلتا ہو جیسے $ب$ کا جذد اور بالکس ایسے
- بدلتا ہو جیسے $ج$ کا مکعب اور اگر $ا = ۳$ جبکہ $ب = ۲۵۶$ اور $ج = ۲$ تو $ب$

کی قیمت معلوم کرو جبکہ $1 = 22$ اور $\frac{1}{2} =$

۱۲۔ یہ معلوم ہے کہ $لا + ما$ ایسے بدلتا ہے جیسے $ی + \frac{1}{2}$ اور $لا - ما$ ایسے بدلتا ہے جیسے $ی - \frac{1}{2}$ باہمی ربط $لا$ اور $ی$ کا دریافت کرو۔
بشرطیکہ $ی = 2$ جبکہ $لا = 3$ اور $ما = 1$

۱۳۔ اگر 1 بالاشتراك ایسے بدلتا ہے جیسے $ب$ اور $ج$ اور $ب$ ایسے بدلتا ہو جیسے $د$ اور $ج$ بالعکس ایسے بدلے جیسے 1 تو ثابت کرو کہ 1 ایسے بدلتا ہے جیسے $د$ ۔

۱۴۔ اگر $ما$ ایسے بدلتا ہے جیسے تین مقادیر کا مجموعہ جن میں سے پہلی مقدار مستقل ہے دوسری مقدار ایسے بدلتی ہے جیسے $لا$ اور تیسری ایسے بدلتی ہے جیسے $لا^2$ اور اگر $ما = 1$ جبکہ $لا = 1$ اور $ما = 2$ جبکہ $لا = 3$ تو $ما$ کی قیمت دریافت کرو جبکہ $لا = 4$ ۔

۱۵۔ جب کہ ایک جسم حالت سکون سے گرتا ہے تو نقطہ ابتدائی سے اس کا فاصلہ ایسے بدلتا ہے جیسے مربع اس وقت کا جو اس نے گرنے میں صرف کیا۔ اگر ایک جسم $\frac{1}{4}$ ۴۰۲ مربع فٹ ۵ سکند میں نیچے گرے تو دریافت کرو کہ ۱ سکند میں وہ کتنا گرے گا۔ نیز معلوم کرو کہ دسویں سکند میں وہ کتنا گرے گا؟

۱۶۔ کسی گولے کا حجم ایسے بدلتا ہے جیسے اس کے نصف قطر کا مکعب۔ جب نصف قطر $\frac{1}{2}$ فٹ ہو تو حجم $\frac{1}{8}$ فٹ مکعب ہوتا ہے۔ اگر نصف قطر ۹ فٹ ہو تو حجم دریافت کرو۔

۱۷۔ کسی گول ٹکیا کا وزن ایسے بدلتا ہے جیسے اس کے نصف قطر کا مربع اگر موٹائی مستقل ہو اور ایسے بدلتا ہے جیسے موٹائی جبکہ نصف قطر مستقل ہو۔ دو ٹکیوں کی موٹائیوں کی باہمی نسبت ۹ : ۸ ہے اگر پہلی ٹکیا کا وزن دوسری کے وزن کا دو چندان ہو تو ان کے نصف قطروں کی نسبت معلوم کرو۔

۱۸۔ ایک کشتیوں کی دوڑ کی تقریب پر کسی ایک دن میں دوڑوں کی

تعداد بالا شراک ایسے بدلتی ہے جیسے دنوں کی تعداد شروع تقریب سے اس دن تک اور دنوں کی تعداد آخر تقریب سے اس دن تک جبکہ ہر دو صورتوں میں زیر بحث دن کو شامل کیا جائے۔ تین دنوں میں بالترتیب ۶، ۵، ۳ دوپہر ہوئیں معلوم کرو کہ یہ کون سے دن تھے اور تقریب کتنے دن رہی؟

۱۹۔ کسی ہیرے کی قیمت اس کے وزن کے مربع کے موافق بدلتی ہے۔ تین سونے کی انگوٹھیاں جن میں سے ہر ایک میں ایک ایک ہیرا جڑا ہوا ہے وزن میں برابر ہیں۔ انگوٹھیوں کی قیمتیں جداگانہ ۱ پونڈ، ۲ پونڈ، ۳ پونڈ ہیں اور ان کے ہیروں کے وزن بالترتیب ۳، ۴، ۵ رتی ہیں۔ ثابت کرو کہ ایک رتی ہیرے کی قیمت $(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5})$ (ب) پونڈ ہے بشرطیکہ سب انگوٹھیوں کی تیاری کی مزدوری یکساں ہو۔

۲۰۔ دو شخصوں کے وظیفے ان کی مدت ملازمت کے جذر کے تناسب میں، ایک نے دوسرے کی نسبت ۹ سال زیادہ ملازمت کی ہے اور اس کا وظیفہ دوسرے کے وظیفہ سے ۵۰ روپیہ زیادہ ہے۔ اگر پہلے شخص کی مدت ملازمت دوسرے کی مدت ملازمت سے $\frac{1}{4}$ سال زیادہ ہوتی تو ان کے وظیفوں میں نسبت ۹:۸ ہوتی۔ معلوم کرو کہ انھوں نے کتنے سال ملازمت کی ہے اور ان کے وظیفے جداگانہ کیا ہیں؟

۲۱۔ کسی سیارہ کی کشش اپنے چاندوں پر بالراست ایسے بدلتی ہے جیسے سیارہ کی مقدار مادہ م اور بالعکس ایسے بدلتی ہے جیسے فاصلہ 'د' کا مربع۔ نیز کسی چاند کی مدت گردش کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے فاصلہ اور بالعکس ایسے بدلتا ہے جیسے قوت جاذبہ۔ اگر م، د، ت کی متناظر قیمتیں م، د، ت اور م، د، ت ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{M}{M'} = \frac{d^2}{d'^2} = \frac{T^2}{T'^2}$$

اس نتیجہ کو استعمال کرنے سے مشتری (جپیٹر) کے ماس چاند کی

مدت گردش معلوم کرو جس کے فاصلے ہمارے چاند کے فاصلے سے
نسبت ۳۵:۳۱ ہے اور یہ معلوم ہے کہ مشتری کی مقدار مادہ زمین کی
مقدار مادہ کا ۳۴۳ کیا ہے اور ہمارے چاند کی مدت گردش ۳۲،۷۷۲ دن ہے۔
۲۲۔ کسی انجن میں کوئلہ کا خرچ رفتار کے مربع کے موافق بدلتا ہے
جب رفتار ۶ میل فی گھنٹہ ہو تو ایک گھنٹہ میں ۲ ٹن کوئلہ صرف ہوتا ہے
اگر ایک ٹن کوئلہ کی قیمت ۱۰ شلنگ ہو اور انجن پر دوسرے اخراجات
۱۱ شلنگ ۳ پنس فی گھنٹہ ہوں تو ۱۰۰ میل سفر کا کم سے کم خرچ
دریافت کرو۔

$$\text{تیسری رقم} = 1 + 2 \text{ ف}$$

$$\text{چوتھی} = 1 + 3 \text{ ف}$$

$$\text{بیسویں} = 1 + 19 \text{ ف}$$

$$\text{اور بالعموم} \text{ ع } \text{ویں رقم} = 1 + (ع - 1) \text{ ف}$$

اگر رقموں کی کل تعداد n ہو اور x سے آخری رقم تعبیر کی جائے تو $x = 1 + (n - 1) \text{ ف}$ (۱)

مثال (۱) سلسلہ ۱، ۴، ۸، ۱۰، کی ۱۹ ویں رقم دریافت کرو۔

$$\text{پہلی رقم} = ۱۰ \text{ اور فرق مشترک} = ۲$$

$$\text{اس لیے ۱۹ ویں رقم} = ۱۰ + (۱۹ - ۱) \times (۲ -) = ۲۶ -$$

مثال (۲) سلسلہ ۵، ۷، ۹، ۱۱، وغیرہ کی کونسی رقم ۲۵ کے برابر ہے؟ فرض کرو کہ سلسلہ کی r ویں رقم رقم مطلوبہ ہے۔

$$\text{تب } ۲۵ = ۵ + (r - 1) \times ۲ = ۲ + ۳ = r \text{ جس سے } r = ۱۱$$

پس معلوم ہوا کہ سلسلہ معلومہ کی گیارہویں رقم ۲۵ ہے

مثال (۳) کسی سلسلہ حسابیہ میں کل ۲۵ رقمیں ہیں آخری رقم ۵ ہے اور فرق مشترک ۳ اس کی پہلی رقم دریافت کرو۔ جواب ۳

مثال (۴) ثابت کرو کہ کسی سلسلہ حسابیہ میں شروع اور آخر سے دو متساوی الفصل رقموں کا مجموعہ پہلی اور آخری رقم کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

ہم سلسلہ حسابیہ میں متعدد ارقام کا مجموعہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ۱ = رقم اول، $ف =$ فرق مشترک، $n =$ تعداد ارقام

$خ =$ آخری رقم اور $ص = n$ ارقام کا حاصل جمع تب

$$ص = ۱ + (۱ + ف) + (۱ + ۲ ف) + \dots + (خ - ۲ ف) + (خ - ف) + خ$$

اگر اس سلسلے کی ترتیب الٹ دی جائے تو

$$ص = خ + (خ - ف) + (خ - ۲ ف) + \dots + (۱ + ۲ ف) + (۱ + ف) + ۱$$

دونوں سلسلوں کو جمع کرنے سے

$$۲ ص = (۱ + خ) + (۱ + خ) + \dots + ن \text{ رقموں تک} = ن (۱ + خ) \quad (۱)$$

$$\therefore ص = \frac{ن}{۲} (۱ + خ) \dots \dots \dots (۱)$$

نیز $خ = \text{رقم آخر} = ۱ + (ن - ۱) ف$

$$\text{اس لیے } ص = \frac{ن}{۲} \{ ۱ + (ن - ۱) ف \} \dots \dots \dots (۲)$$

۴۱۔ دفعہ ماقبل میں (۱) اور (۲) دو کارآمد ضابطے ہیں۔ ان میں سے کسی میں کوئی ایک حرف نامعلوم مقدار کو تعبیر کر سکتا ہے جبکہ باقی تین مقداریں دی ہوئی ہوں مثلاً اگر ضابطہ (۱) میں $ص$ ، $ن$ ، $خ$ کے لیے معلومہ قیمتیں درج کی جائیں تو ۱ معلوم کرنے کے لیے ہمیں ایک مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح دوسری مساواتوں میں۔ لیکن ان ضابطوں کو صرف زبانی یاد رکھ کر استعمال نہیں کرنا چاہیے بلکہ ابتدائی اصول سے ہر سوال کو حل کرنے کی کوشش کرنا مفید ہوگا۔

مثال (۱) سلسلہ $۱ - ۵ - ۱۱ - ۱۷ - ۲۳$ وغیرہ کی ۱۷ رقموں کا مجموعہ

دریافت کرو۔

س مثال میں $۱ = ۱ - ۵ = ۱۱ - ۱۷ = ۱۷ - ۲۳ = ۲۳ - ۲۹$ نتیجہ مندرجہ بالا

(۲) سے

$$ص = \frac{۱۷}{۲} \left\{ \frac{۵}{۲} \times ۱۶ + \frac{۱۱}{۲} \times ۲ \right\} = \frac{۱۷}{۲} (۲۰ + ۱۱)$$

$$= \frac{۳۱ \times ۱۷}{۲} = ۲۶۳ \frac{۱}{۲}$$

مثال (۲) سلسلہ $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots$ کا مجموعہ ۱۰۰ رقموں تک دریافت کرو۔

سلسلہ کی آخری رقم = ۱۰۰

$$\text{اس لیے مجموعہ مطلوبہ} = \frac{۱۰۰}{۲} (۱۰۰ + ۱) = ۵۰ \times ۱۰۱ = ۵۰۵۰$$

مثال (۳) کسی سلسلہ حسابیہ کی ۵ رقموں کا مجموعہ ۳۵ ہے اس کی

رقم متوسط دریافت کرو۔

سلسلہ حسابیہ کی پانچ رقموں کے مجموعہ کو بنیادیت مختصر صورت میں

لانے کے لیے ان ارقام کو اس طرح لکھو۔

$$۱ - ۲ ف، ۱ - ۱ ف، ۱ + ۱ ف، ۱ + ۲ ف$$

اس صورت میں ۵ = مجموعہ = ۳۵ اس لیے رقم متوسط = ۱ = ۷
مثال (۴) ایک سلسلہ کی پہلی رقم ۵ آخری رقم ۴۵ اور حاصل جمع ۴۰۰ ہے، کل رقموں کی تعداد اور فرق مشترک معلوم کرو۔

اگر تعداد ارقام n ہو تو ضابطہ $v = \frac{n}{4} (1 + x)$ سے
جہاں v حاصل جمع ہے اور x آخری رقم ۴۰۰ = $\frac{n}{4} (5 + 45)$

$$\therefore n = ۱۶$$

اگر فرق مشترک f ہو تو $۴۵ = ۱۶$ ویں رقم $= ۱۵ + ۵ ف$
 $\therefore ۲ = ۱۶ - ۱۵ = ۱$

۴۲۔ اگر کسی سلسلہ حسابیہ کی دو رقمیں معلوم ہوں تو سلسلہ مکمل طور پر معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ معطیات سے ہمیں دو ہمسرا و مساواتیں ملتی ہیں جن کو حل کرنے سے پہلی رقم اور فرق مشترک معلوم ہو سکتا ہے۔

مثال۔ سلسلہ حسابیہ کی ۵ ویں اور چوتھی رقمیں بالترتیب ۶۱ اور ۶۴ ہیں، ۲۳ ویں رقم معلوم کرو۔

اگر ۱ پہلی رقم ہو اور f فرق مشترک تو
۶۱ = ۵ ویں رقم = $۱ + ۴ ف$

$$۶۴ = \text{چوتھی رقم} = ۱ + ۳ ف$$

جس سے معلوم ہوا کہ $۳ = ۴ - ۱$ اور $۱ = ۱ - ۱$

$$\text{اور } ۲۳ \text{ ویں رقم} = ۱ + ۲۲ ف = ۱۶$$

۴۳۔ ۱ واسط حسابیہ

تعریف ۱۔ جب تین مقادیر سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو درمیانی مقدار کو دوسری دو کا اوسط حسابی کہتے ہیں۔ مثلاً ۵ اوسط حسابی ہے

۳ اور ۷ کے درمیان ۱ اوسط حسابی ہے۔ ۱-ف، ۱+ف کے درمیان۔
 ۴۴۔ دو مقداریں معلومہ ۱ اور ب کا اوسط حسابی دریافت کرو۔
 فرض کرو کہ لا اوسط حسابی ہے اس لیے ۱-لا، ب سلسلہ حسابیہ میں ہیں
 لا-۱=ب-۱ یعنی ۲ لا=۱+ب

$$\therefore \frac{۱+ب}{۲} = لا$$

$$\text{مثال۔ } \frac{۱}{۲} \text{ اور } \frac{۱}{۴} \text{ کا اوسط حسابی } = \frac{\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}}{۲} = \frac{\frac{۳}{۴}}{۲} = \frac{۳}{۸}$$

۴۵۔ کسی دو مقداروں کے درمیان ایسی رقوموں کی کوئی تعداد درج

کرنا ممکن ہے کہ اس طرح سے جو سلسلہ حاصل ہوتا ہے وہ سلسلہ حسابیہ ہو اور
 دفعہ ۳۳ کی تعریف کی توسیع سے اس طرح درج کی ہوئی رقوموں کو اوسط حسابیہ کہتے ہیں۔
 ۴۶۔ دو مقداریں معلومہ کے درمیان متقدما و اوسط حسابیہ مندرج کرو۔
 فرض کرو کہ ۱ اور ب دی ہوئی مقداریں ہیں اور ان کے درمیان
 ن اوسط حسابیہ مندرج کرنی ہیں۔ اگر ۱ اور ب کو بھی شامل کیا جائے تو
 ارقام مع ن اوسط حسابیہ کے ن+۲ ہونگی۔ اب ہمیں ایک ایسا
 سلسلہ حسابیہ معلوم کرنا ہے جس میں ن+۲ ارقام ہوں اور جس کی پہلی
 ۱ اور آخری رقم ب ہو

اگر فرق مشترک = ف تو ب-۱ = (ن+۲) دیں رقم

$$= ۱ + (ن+۱) ف$$

$$\therefore ف = \frac{۱-ب}{ن+۱}$$

اس لیے اوسط مطلوبہ ہیں ۱+ $\frac{۱-ب}{ن+۱}$ ، ۱+ $\frac{۲(۱-ب)}{ن+۱}$ ،

$$۱+ \frac{۳(۱-ب)}{ن+۱}، \dots، ۱+ \frac{ن(۱-ب)}{ن+۱}$$

مثال (۱) ۴ اور ۶ کے درمیان ۲۰ واسطہ حسابیہ مندرج کرو۔
 یہاں تعداد ارتقام ۲۲ ہے اس لیے $۴ + ۲۱ = ۲۵$ ف اگر ف فرق مشترک ہو
 ∴ $۳ = ۴$ اور سلسلہ ۴، ۱۰، ۱۶، ۲۲، ۲۸، ۳۴، ۴۰ ہے۔
 اس لیے واسطہ مطلوبہ ۴، ۱۰، ۱۶، ۲۲، ۲۸، ۳۴، ۴۰ ہیں۔

مثال (۲) سلسلہ حسابیہ کی تین رقموں کا مجموعہ ۲۷ ہے اور ان کے مربعوں کا مجموعہ ۲۹۳ ہے۔ رقمیں دریافت کرو۔
فرض کرو کہ ۱ درمیانی رقم ہے اور ف فرق مشترک ہے۔ پس تین رقمیں ہوں گی ۱- ف، ۱، ۱+ ف

لہذا $1 - ف + 1 + 1 + ف = ۲۷$ جس سے $۱ = ۱۹$ اور مطلوبہ ارقام ہیں $۹ - ف، ۹، ۹ + ف$

∴ $(\overset{2}{9}-\overset{1}{9}f) + \overset{2}{9} + (\overset{1}{9}+f) = 293$ جس سے حاصل ہوتا ہے

ف = ± یعنی ارقام مطلوبہ ہیں ۴، ۹، ۱۴

مثال (۳) اس سلسلہ حسابیہ کی عرقوں کا مجموعہ معلوم کرو جس کی
نویں رقم ۳ ن - ۱ ہے ن = ۱ اور ن = ع رکھنے سے حاصل ہوتا ہے کہ
رقم اول = ۲، آخری رقم = ۳ ع - ۱

$$\therefore \text{مجموع} = \frac{ع}{2} = (1 - ع + ع^2) \frac{ع}{2} = \frac{ع}{1 + ع}$$

۷- سلسلہ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ وغیرہ کا حاصل جمع ۲۴ رقموں تک دریافت کرو۔

۸- سلسلہ $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ کا حاصل جمع ۱۰ رقموں تک دریافت کرو۔

۹- سلسلہ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ کا حاصل جمع ۵۰ رقموں تک دریافت کرو۔

۱۰- سلسلہ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ کا حاصل جمع ۲۵ رقموں تک دریافت کرو۔

۱۱- سلسلہ $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ کا حاصل جمع ۴۰ رقموں تک دریافت کرو۔

۱۲- سلسلہ $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ کا حاصل جمع ۲۱ رقموں تک دریافت کرو۔

۱۳- سلسلہ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ کا حاصل جمع ۲۱ رقموں تک دریافت کرو۔

۱۴- سلسلہ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ کا حاصل جمع ۲۱ رقموں تک دریافت کرو۔

۱۵- سلسلہ $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ کا حاصل جمع ۲۵ رقموں تک دریافت کرو۔

۱۶- سلسلہ $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ کا حاصل جمع ۲۵ رقموں تک دریافت کرو۔

۱۷- سلسلہ $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ کا حاصل جمع ۲۵ رقموں تک دریافت کرو۔

۱۸- پہلے ۱۵۵ اعداد کا مجموعہ دریافت کرو۔

۱۹- کسی سلسلہ حسابیہ میں پہلی رقم = ۲، آخری رقم = ۲۹ اور مجموعہ = ۱۵۵

فرق مشترک معلوم کرو۔

۲۰- سلسلہ حسابیہ کی ۵ رقموں کا مجموعہ ۶۰۰ ہے اور فرق مشترک ۵ ہے

رقم اول معلوم کرو۔

۲۱- سلسلہ حسابیہ کی تیسری رقم ۸ ہے اور ساتویں رقم ۳۰ ہے، ارقم

کا مجموعہ دریافت کرو۔

۲۲- تین اعداد سلسلہ حسابیہ میں ہیں ان کا حاصل جمع = ۲۴ اور ان کا

حاصل ضرب = ۵۰۴ انہیں معلوم کرو۔

۲۳- تین اعداد سلسلہ حسابیہ میں ہیں ان کا حاصل جمع ۱۲ ہے اور ان کے

مکعبوں کا حاصل جمع ۴۰۸ ہے انہیں دریافت کرو۔

۹۔ ۶۔ ۳۔ ۳۔ ۶۔ ۳۔ ۶۔ ۹۔ ۱۲۔ ۱۵۔ ۱۸۔ ۲۱، تو صرف یہ ان کا حاصل جمع ۶۶ ہے، اگر ہم آخری رقم سے شروع کریں اور پیچھے کی طرف ۴ رقم گنیں تو بھی حاصل جمع ۶۶ ہے اس سے معلوم ہوا کہ اگرچہ ن کی منفی قیمت ہمارے سوال کا پورا جواب نہیں ہے مگر پھر بھی اسے ہم قابل فہم معنی دے سکتے ہیں جیسا کہ دفعہ ذیل سے ظاہر ہے۔

۴۸۔ اس نتیجہ کی تحقیق صورت عامہ میں اس طرح ہو سکتی ہے
ن کی قیمت معلوم کرنے کے لیے مساوات ذیل ہے:

ف ن + (۱۲ - ف) ن - ۲ ص = (۱)

اس سے ہمیں ن کی دو قیمتیں ملیں گی۔ چونکہ فی الحال زیر بحث وہی عمل ہے جس میں ن کی ایک قیمت مثبت ہے دوسری منفی۔ ہم ان کو ن اور - ن سے تعبیر کریں گے۔

سلسلہ کی ن ویں رقم = 1 + (ن - 1) ف
اگر ہم اس رقم سے شروع ہو کر پیچھے کی طرف گنیں تو فرق عام - ف
ہوگا اور نہ ارقام کا مجموعہ

$$\left\{ (1 - \frac{1}{r}) + (\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}) \right\} \frac{1}{r} =$$

اب ہم ثابت کرینگے کہ یہ ص کے برابر ہے۔

$$\text{جملہ} = \frac{n}{2} \{ 12 + (n-1)(1-2) \}$$

$$= \frac{1}{f} \{ 2n_1 + n_2 + n_3 - n_4 (1 + f) \}$$

$$= \frac{1}{r} \{ r^2 n n_f - (f n^2 - r^2 - f n) \}$$

$$= \frac{1}{4} (ص ۴ - ص ۲) = ص کیونکہ ان مساوات$$

ف ن + (۱۲ - ف) ن - ۲ ص = کی ایک اصل ہے اور - ن ن آں
مساوات کی دونوں اصلوں کا حاصل ضرب ہے۔

۴۹۔ اگر n کی قیمت کسری ہو تو اس حل کے مطابق رقموں کی کوئی تعداد شرائط سوال کو پورا نہیں کرے گی۔

مثال۔ کتنی رقمیں سلسلہ ۲۶، ۲۱، ۱۶، کی لی جائیں کہ حاصل جمع ۷۴ ہو؟

$$\text{یہاں } \frac{n}{2} = \{ (n-1)(5) + 52 \}$$

$$\text{یعنی } 5n - 2 = 148 + 5n$$

$$\text{یا } (n-34)(5) = 0$$

$n = 34$ یا $\frac{2}{5}$ ، یہاں تعداد ارقام ۳۴ ہے۔ نیز ظاہر ہے کہ اگر رقمیں سلسلہ کی لی جائیں تو حاصل جمع ۷۴ سے زیادہ ہے اور اگر ۸ لی جائیں تو کم۔

۵۰۔ ہم اس جگہ سلسلہ حسابیہ کی چند متفرق مثالیں دیں گے۔

مثال (۱) دو حسابی سلسلوں کی n رقموں کے مجموعوں کی باہمی

نسبت $1+n : 2+n$ ہے، ان کی ۱۱ ویں رقموں کی نسبت دریافت کرو۔

فرض کرو کہ دونوں سلسلوں کی پہلی رقمیں اور فرق مشترک بالترتیب 1 ، f اور 2 ، f ہیں۔

$$\text{بموجب شرائط سوال } \frac{1 + (n-1)f}{2 + (n-1)f} = \frac{1 + n}{2 + n}$$

$$\frac{1 + (n-1)f}{2 + (n-1)f} = \frac{1 + n}{2 + n} \text{ کی قیمت معلوم کرنی ہے۔ اس لیے } n = 21 \text{ رکھنے سے}$$

$$\text{حاصل ہوگا } \frac{1 + 20f}{2 + 20f} = \frac{148}{111} = \frac{4}{3} \text{ پس نسبت مطلوبہ } 3 : 4 \text{ ہے}$$

مثال (۲) اگر v ، v ، v ، ...، v ایسے حسابی سلسلوں کی

n رقموں کے مجموعے ہوں جن کی پہلی رقمیں بالترتیب 1 ، 2 ، 3 ، ...،

$$\frac{n(n+1)}{2} = \left\{ (1-n) + 2 \right\} \frac{n}{2} = ص$$

$$\frac{n(3n+1)}{2} = \left\{ 2(1-n) + 4 \right\} \frac{n}{2} = \text{ص}$$

$$\frac{n(1+n)}{2} = \left\{ 5(1-n) + 6 \right\} \frac{n}{2} = \text{مسئله}$$

$$\left\{ 1 + n(p-1) \right\} \frac{n}{2} = \left\{ (1-p)(1-n) + p \right\} \frac{n}{2} = p$$

اس لیے مجموعہ مطلوبہ = $\frac{n}{2} \{ (n+1) + (n+3) + \dots + (2p-1 \times n + 1) \}$

$$\left\{ \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} \times 1 - \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n} \right) \right\} \frac{n}{2} =$$

$$\left\{ p + (\overline{1-p} + \dots + 5+3+1)n \right\} \frac{n}{r} =$$

$$(1 + \frac{1}{p}n) \frac{n}{2} = (\frac{1}{p} + \frac{1}{p}n) \frac{n}{2} =$$

امثلہ نمبری ۴ (ب)

۱۔ معلوم ہے $1 = 2$ ، $f = 4$ ، $v = 160$ دریافت کرو n ۔

۳۔ کتنی ارقام سلسلہ ۱۲، ۱۶، ۲۰، کی لی جائیں کہ مجموعہ ۲۰۸ کے برابر ہو؟

۳۔ کسی سلسلہ حسابیہ میں تیسری رقم پہلی رقم کی چارگنی ہے اور چھٹی رقم

۱۰، ہے سلسلہ دریافت کرو۔

۴۔ کسی سلسلہ حسابیہ کی دوسری ۳۱ ویں اور آخری رقمیں بالترتیب

$\frac{3}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ ہیں۔ رقم اول اور تعداد ارقام دریافت کرو۔

۵۔ کسی سلسلہ حسابیہ کی چوتھی ۴۲ ویں اور آخری رقمیں بالترتیب

۹۵۰، ۱۲۵ ہیں پہلی رقم اور کل تعداد ارقام دریافت کرو۔

۶۔ ایک شخص پر ۳۶۰۰ روپیہ قرض ہے وہ اُسے ۴۰ قسطوں میں ادا

کرتا چاہتا ہے جو کہ سلسلہ حسابیہ میں ہیں ۳۰ قسطیں ادا کرنے کے بعد وہ فوت ہو گیا اور اس کے قرض کا ایک تہائی حصہ ادا کرنا باقی رہا۔ پہلی قسط کی قیمت دریافت کرو۔

۷۔ دو اعداد کا مجموعہ $\frac{1}{2}$ ہے ان کے درمیان واسطہ حسابیہ کی جفت تعداد مندرج کی گئی ہے واسطہ کا مجموعہ ان کی تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہے۔ واسطہ کی تعداد معلوم کرو۔

۸۔ سلسلہ ۲، ۵، ۸، کی ن ارقام کا مجموعہ ۹۵۰ ہے۔ ن کی قیمت معلوم کرو۔

۹۔ سلسلہ $\frac{1}{1+}$ ، $\frac{1}{1-}$ ، کی ن رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

۱۰۔ اگر، رقموں کا مجموعہ ۴۹ ہو اور، ارقموں کا ۲۸۹ تو ن رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

۱۱۔ اگر سلسلہ حسابیہ کی پ دیں، ق دیں، ر دیں رقمیں بالترتیب و، ب، ج ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(ق - ر) + (پ - ر) + (پ - ق) = ج$$

۱۲۔ ایک سلسلہ حسابیہ کی ف رقموں کا مجموعہ ق ہے اور ق رقموں کا

مجموعہ ف ہے تو ف + ق رقموں کا مجموعہ معلوم کرو۔

۱۳۔ چار اعداد سلسلہ حسابیہ میں ہیں ان کا حاصل جمع ۲۴ ہے اور ان کا حاصل

ضرب ۹۴۵ نہیں دریافت کرو۔

۱۴۔ ۲۰ کو ایسے چار حصوں میں تقسیم کرو جو سلسلہ حسابیہ میں ہوں

اور پہلے اور چوتھے حصہ کے حامل ضرب کو دوسرے اور تیسرے کے حامل ضرب سے نسبت ۲:۳ کی ہو۔

۱۵۔ کسی سلسلہ حسابیہ کی پ دیں رقم ق ہے اور ق دیں رقم پ ہے اس کی م دیں رقم دریافت کرو۔

۱۶۔ کتنی رقمیں سلسلہ ۹، ۱۲، ۱۵، کی لی جائیں کہ حاصل جمع ۳۰۶ ہو؟
۱۷۔ اگر کسی سلسلہ حسابیہ کی ن ارقام کا مجموعہ ۲ ن + ۳ ن ہو تو اس کی ر دیں رقم دریافت کرو۔

۱۸۔ اگر کسی سلسلہ حسابیہ کی ن ارقام کے مجموعہ کو ن ارقام کے مجموعہ سے نسبت م:ن ہو تو ثابت کرو کہ م دیں رقم کو ن دیں رقم سے نسبت م:ن - ۱ ہوگی۔
۱۹۔ ثابت کرو کہ کسی سلسلہ حسابیہ کی طاق رقموں کا مجموعہ مساوی ہوتا ہے درمیانی رقم اور تعداد رقم کے حاصل ضرب کے۔

۲۰۔ اگر ن کی تمام قیمتوں کے لیے ص = ن (۵ ن - ۳) تو پ دیں رقم دریافت کرو۔

۲۱۔ کسی سلسلہ حسابیہ کی تعداد ارقام جفت ہے۔ طاق رقموں کا مجموعہ ۲۲ ہے اور جفت رقموں کا ۳۰ اور آخری رقم رقم اول سے بقدر ۱۰ کے زیادہ ہے۔ تعداد ارقام دریافت کرو۔

۲۲۔ دو مختلف نظام اعداد ہیں ہر ایک میں تین ارقام ہیں جو سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔ اور ہر ایک کا مجموعہ ۱۵ ہے۔ پہلے نظام کا فرق مشترک دوسرے نظام کے فرق مشترک سے بقدر ایک کے زیادہ ہے اور پہلے نظام کے حامل ضرب کو دوسرے نظام کے حامل ضرب سے نسبت ۸:۷ کی ہے۔ اعداد دریافت کرو۔

۲۳۔ لا اور ۲ کا ر واں اواسط حسابی ۲ لا اور با کے ر دیں اواسط حسابی کے برابر ہے جبکہ ہر ایک صورت میں ن اواسط حسابیہ مندرج کی جائیں لا اور با کا باہمی ربط دریافت کرو۔

۲۴۔ اگر کسی سلسلہ حسابیہ کی پ رقموں کا مجموعہ ق رقموں کے مجموعہ کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ پ + ق ارقام کا مجموعہ صفر ہے۔

پنج باب

سلسلہ ہندسیہ

۵۱۔ تعریف۔ جب کسی سلسلہ مقادیر کی ہر ایک رقم اپنی رقم
ما قبل اور کسی مستقل جزو ضربی کے حاصل ضرب کے برابر ہو تو ایسے سلسلے کو
سلسلہ ہندسیہ کہتے ہیں۔

اس جزو ضربی کو نسبت مشترک کہتے ہیں اور کسی رقم کو
اس کی رقم ما قبل پر تقسیم کرنے سے اس کو معلوم کرتے ہیں۔

مثلاً ۳، ۱۲، ۴۸، ۱۹۲..... ایک سلسلہ ہندسیہ ہے جس کی نسبت مشترک ۴ ہے

۱ - $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{9}$ - $\frac{1}{27}$

" $\frac{1}{4}$ " " "..... ۵، ۱۰، ۲۰.....

" $\frac{1}{5}$ " " "..... ۱، ۲، ۳، ۴.....

۵۲۔ اگر رقم اول اور نسبت مشترک معلوم ہوں تو سلسلہ ہندسیہ کی
ن ویں رقم دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ۱ رقم اول ہے اور ب نسبت مشترک

سلسلہ ۱، ب، ب^۲، ب^۳..... کا بغور ملاحظہ کرنے سے معلوم ہوگا
کہ کسی رقم میں ب کا قوت نما تعداد ارقام سے جو اس رقم تک ہو بقدر
ایک کے کم ہے۔

مثلاً تیسری رقم = ب^۲

چھٹی رقم = ا ب^۵

۲۰ ویں رقم = ا ب^{۱۹}

ع ویں رقم = ا ب^{ع-۱}

اور بالعموم اگر ن = تعداد ارتقام اور خ = آخری رقم

تو خ = ا ب^{ن-۱}

۵۳۔ تعریف۔ جب تین مقادیر سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو درمیانی

مقدار کو دوسری دو کا اوسط ہندسی کہتے ہیں۔

دو مقادیر کا اوسط ہندسی دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ا اور ج دو مقادیر ہیں اور ہ ان کا اوسط ہندسی ہے

اب چونکہ ا، ہ، ج سلسلہ ہندسیہ میں ہیں۔

اس لیے $\frac{ہ}{ا} = \frac{ج}{ہ}$ یا $ہ^۲ = ا ج$

یا $ہ = \sqrt{ا ج}$

یعنی دو مقادیر کا اوسط ہندسی اُن کے حاصل ضرب کے جذر کے برابر ہے۔

۵۴۔ دوی ہوئی مقداروں کے درمیان متعدد اواسط ہندسیہ

مندرجہ کرو۔

فرض کرو کہ ا اور ج دو مقادیر ہیں اور ن اواسط ہندسیہ کی تعداد کو

تعبیر کرتا ہے۔ سلسلہ کی کل تعداد ارتقام = ن + ۲

پس ہمیں ایک ایسا سلسلہ ہندسیہ معلوم کرنا ہے جس کی پہلی رقم

ا ہو اور آخری رقم ج۔ اگر نسبت مشترک کو ب سے تعبیر کریں تو

ج = (ن + ۲) ویں رقم = ا ب^{ن+۱}

∴ $ب = \frac{ج}{ا^{ن+۱}}$

ب = $\left(\frac{ج}{ا}\right)^{\frac{۱}{ن+۱}}$ (۱)

اواسط مطلوبہ ہوئیں $۱ب، ۱ب^۲، ۱ب^۳،، ۱ب^۱۰$
جہاں ب کی قیمت (۱) سے حاصل ہوتی ہے۔

مثال - ۱۶۰ اور ۵ کے درمیان ۴ اواسط ہندسیہ مندرج کرو۔
ہمیں ۶ رقوم سلسلہ ہندسیہ کی معلوم کرنی ہیں جن میں سے پہلی رقم ۱۶۰ ہے اور چھٹی رقم ۵۔

اگر ب نسبت مشترک ہو تو $۵ = ۱۶۰ ب$ چھٹی رقم $= \frac{۱}{۳۲}$
اس لیے $ب = \frac{۱}{۳۲}$ پس

اواسط مطلوبہ ہوئیں $۱۰، ۲۰، ۴۰، ۸۰$

۵۵ - متعدد ارقام سلسلہ ہندسیہ میں ہیں ان کا حاصل جمع دریافت کرو۔
فرض کرو $۱ =$ پہلی رقم، $ب =$ نسبت مشترک، $ن =$ تعداد ارقام
اوص $=$ حاصل جمع۔

تب $ص = ۱ + ۱ب + ۱ب^۲ + + ۱ب^{ن-۱} + ۱ب^n$ (۱)
ہر ایک رقم کو ب سے ضرب دو۔

$ب ص = ۱ب + ۱ب^۲ + + ۱ب^{ن-۱} + ۱ب^n$ (۲)
(۱) کو (۲) سے تفریق کرو تو حاصل ہوگا۔

$$ب ص - ص = ۱ب^n - ۱$$

$$\therefore ص (ب - ۱) = ۱ب^n - ۱$$

$$\therefore ص = \frac{۱ب^n - ۱}{ب - ۱} \text{ (۳)}$$

شمار کنندہ اور نسب نمادوں کو - ۱ سے ضرب دیں تو حاصل ہوگا

$$ص = \frac{۱(ب^n - ۱)}{ب - ۱} \text{ (۴)}$$

چونکہ $۱ب^n =$ خ جہاں خ رقم آخر ہے

$$\text{اس لیے } ص = \frac{ب خ - ۱}{ب - ۱}$$

نوٹ - بہتر ہو گا کہ طالب علم ص کی دونوں جبریہ صورتوں (۳) اور (۴) کو یاد رکھے اور (۴) کو ہمیشہ استعمال کرے سوائے اس صورت کے جبکہ ب ثابت ہو اور ایک سے بڑا ہو۔

مثال - سلسلہ $\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \dots$ کی رقوموں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

نسبت مشترک = $\frac{2}{3}$ اس لیے ضابطہ (۴) کی رو سے

$$ص = \frac{\left\{ \left(\frac{2}{3} - 1 \right) - 1 \right\} \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{\left\{ -\frac{1}{3} - 1 \right\} \frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{\left\{ -\frac{4}{3} \right\} \frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{-\frac{8}{9}}{\frac{5}{3}} = -\frac{8}{15}$$

$$= -\frac{2}{5} \times \frac{2315}{128} \times \frac{2}{3} = -\frac{263}{96}$$

۵۶ - سلسلہ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ پر غور کرو۔

$$ن \text{ ارقام کا مجموعہ } = \frac{\frac{1}{n} - 1}{\frac{1}{n} - 1} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$= 1 - \frac{1}{n}$$

اس نتیجہ سے ظاہر ہے کہ سلسلہ بالا کی خواہ کتنی بھی رقیں لی جائیں ان کا مجموعہ ہمیشہ ۲ سے کم رہے گا نیز ہم دیکھتے ہیں کہ ن کو کافی بڑا لینے سے ہم کسر $\frac{1}{n}$ کو اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں جتنا چاہیں پس رقوموں کی تعداد کافی بڑی لینے سے سلسلہ بالا کے مجموعہ اور ۲ کا فرق اتنا کم ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔
اس نتیجہ کی توضیح بطریق ہندسی اسی طرح ہو سکتی ہے۔

۱
۲
۳
۴
۵
۶
۷
۸
۹
۱۰
۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
۱۵
۱۶
۱۷
۱۸
۱۹
۲۰
۲۱
۲۲
۲۳
۲۴
۲۵
۲۶
۲۷
۲۸
۲۹
۳۰
۳۱
۳۲
۳۳
۳۴
۳۵
۳۶
۳۷
۳۸
۳۹
۴۰
۴۱
۴۲
۴۳
۴۴
۴۵
۴۶
۴۷
۴۸
۴۹
۵۰
۵۱
۵۲
۵۳
۵۴
۵۵
۵۶
۵۷
۵۸
۵۹
۶۰
۶۱
۶۲
۶۳
۶۴
۶۵
۶۶
۶۷
۶۸
۶۹
۷۰
۷۱
۷۲
۷۳
۷۴
۷۵
۷۶
۷۷
۷۸
۷۹
۸۰
۸۱
۸۲
۸۳
۸۴
۸۵
۸۶
۸۷
۸۸
۸۹
۹۰
۹۱
۹۲
۹۳
۹۴
۹۵
۹۶
۹۷
۹۸
۹۹
۱۰۰

فرض کرو کہ $\frac{1}{a}$ ایک محدود خط مستقیم ہے۔ $\frac{1}{a}$ کی تنصیف $\frac{1}{2a}$ پر کرو۔ اور $\frac{1}{2a}$ کی $\frac{1}{4a}$ پر اور $\frac{1}{4a}$ کی $\frac{1}{8a}$ پر اور $\frac{1}{8a}$ کی $\frac{1}{16a}$ پر اور علیٰ ہذا القیاس۔

اس سے ظاہر ہے کہ اگر ہم اسی طرح سے اپنے اعمال تنصیف کو جاری رکھیں تو $\frac{1}{a}$ کے اتنا قریب پہنچ سکتے ہیں جتنا چاہیں۔ یعنی ہمارے آخری حصہ $\frac{1}{a}$ کا طول اتنا کم ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔

اب اگر فرض کیا جائے کہ $\frac{1}{a} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

تو $\frac{1}{2a} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

$\frac{1}{4a} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$

$\frac{1}{8a} = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$

اور علیٰ ہذا القیاس $\frac{1}{16a} = \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots$

تو سلسلہ غیر متناہی کا حاصل جمع $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ تا لامتناہی

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots$

جس سے ثابت ہوا کہ سلسلہ کا حاصل جمع طول $\frac{1}{a}$ یعنی ۲ سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتا خواہ تعداد ارقام کتنی بھی بڑی لی جائے۔ اور رقموں کی تعداد کافی بڑی لینے سے سلسلہ بالاکے مجموعہ اور ۲ کا فرق اتنا کم ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔

آئندہ دفعہ میں اس کی صورت عامہ پر بحث کی جائیگی۔

۵۶۔ لامتناہی سلسلہ ہندسیہ کا استدقاق یا عدم استدقاق

فرض کرو کہ دیا ہوا سلسلہ

$1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \dots$ ہے

دفعہ ۵ کی رو سے اس سلسلہ کی پہلی n رقموں کا مجموعہ

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^n}{1 - \frac{1}{a}}$$

$$\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-b} = \frac{1}{a-b}$$

اس میں $\frac{1}{a-b}$ مستقل ہے اور $\frac{1}{a-b}$ کی قیمت n کی قیمت پر منحصر ہے۔ اگر b بلحاظ عددی قیمت سے a کافی سے چھوٹا ہو تو n کو کافی بڑا لینے سے b کی عددی قیمت اتنی چھوٹی بنائی جاسکتی ہے جتنا ہم چاہیں۔ اس لیے $\frac{1}{a-b}$ کی عددی قیمت صفر کے بے انتہا قریب آجائیگی اگر ہم n کو کافی بڑا لیں۔ پس معلوم ہوا کہ اگر b کی عددی قیمت a کافی سے کم ہو تو n کو کافی بڑا لینے سے دیے ہوئے سلسلہ ہندسیہ کی n رقموں کے مجموعہ اور $\frac{1}{a-b}$ کے فرق کو اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں جتنا ہم چاہیں۔ اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ لا متناہی سلسلہ ہندسیہ $1 + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(a-b)^3} + \dots$ کا مجموعہ $\frac{1}{a-b}$ ہے، اگر b کی عددی قیمت a کافی سے کم ہو۔ اس صورت میں چونکہ n کو کافی بڑا لینے سے دیے ہوئے سلسلہ کی n رقموں کا مجموعہ ایک خاص مقدار $(\frac{1}{a-b})$ کی طرف مائل ہوتا ہے اس لیے ہم کہتے ہیں کہ دیا ہوا لا متناہی سلسلہ ہندسیہ مستحق ہے اور اس کا مجموعہ $\frac{1}{a-b}$ کے برابر ہے۔

اگر $b = a$ تو دیا ہوا سلسلہ ہو جائیگا

$$1 + 1 + 1 + \dots$$

n ہوگا اور n کو کافی بڑا لینے سے n رقموں کے مجموعہ کی عددی

قیمت کسی دیے ہوئے بڑے سے بڑے عدد سے بھی بڑی بنائی جاسکتی ہے اس صورت میں n کو کافی بڑا لینے سے دیے ہوئے سلسلہ کی n رقموں کا مجموعہ کسی خاص مقدار کی طرف مائل نہیں ہوتا۔
اگر $b = -1$ تو سلسلہ ہوگا۔

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

اس سلسلہ کی n رقموں کا مجموعہ صفر یا ۱ ہوگا بموجب اس کے کہ n جفت ہے یا طاق۔ اس صورت میں بھی سلسلہ کی n رقموں کا مجموعہ کسی خاص مقدار کی طرف مائل نہیں ہوتا۔

اگر b کی عددی قیمت اکائی سے بڑی ہو تو n کو کافی بڑا لینے سے b کی عددی قیمت کسی دیے ہوئے بڑے سے بڑے عدد سے بھی بڑی بنائی جاسکتی ہے۔ اس صورت میں n کو کافی بڑا لینے سے $\frac{1}{b}$ کی عددی قیمت کسی دیے ہوئے بڑے سے بڑے عدد سے

بڑی بنائی جاسکتی ہے اور جو n بڑھتا جاتا ہے n رقموں کے مجموعہ کی عددی قیمت بھی بے حد بڑھ جاتی ہے اور کسی خاص مقدار کی طرف مائل نہیں ہوتی۔

ان تمام صورتوں میں جبکہ n کے بے انتہا بڑھنے سے دیے ہوئے لامتناہی سلسلہ کی n رقموں کا مجموعہ کسی خاص مقدار کی طرف مائل نہیں ہوتا دیا ہوا لامتناہی سلسلہ غیر مستحق کہلا تا ہے۔

مثال (۱) سلسلہ غیر متناہی $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \dots$ کا مجموعہ دریافت کرو۔

$$\text{اس جگہ } 1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \dots = \frac{1}{2} \div \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\text{اس لیے مجموعہ مطلوبہ } = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{9} + 1} = \frac{3}{2} \times \frac{9}{13} = \frac{27}{26}$$

مثال (۲) تین اعداد سلسلہ ہندسیہ میں ہیں ان کا حاصل جمع ۱۹ ہے

۱۔ سلسلہ $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{9}$ کو، رقموں تک جمع کرو۔

رقم ۳۸۶ رقم اول دریافت کرو۔

۲۳۔ سلسلہ ہندسیہ کی پہلی رقم ۱ ہے آخری رقم ۲۲۸ اور مجموعہ ارقام ۸۸۹ نسبت مشترک معلوم کرو۔

۲۴۔ سلسلہ ہندسیہ میں تین عددوں کا مجموعہ ۳۸ ہے اور ان کا حاصل ضرب ۱۷۲۸ ہے انہیں دریافت کرو۔

۲۵۔ سلسلہ ہندسیہ میں تین اعداد کا متواتر حاصل ضرب ۲۱۶ ہے اور ان میں سے دو دواعداد کے حاصل ضرب کا مجموعہ ۱۵۶ ہے۔ انہیں دریافت کرو۔

$$۲۶۔ اگر س = ۱ + ب + ب^۲ + تا لامتناہی$$

$$اور ص = ۱ - ب + ب^۲ - تا لامتناہی$$

$$تو ثابت کرو کہ س + ص = ۲ س ب$$

۲۷۔ اگر کسی سلسلہ ہندسیہ کی ف ویں، ق ویں، روں ارقام بالترتیب ل، م، ن ہوں تو ثابت کرو کہ ل - ق - م - ن - ف - ق = ۱

۲۸۔ کسی لامتناہی سلسلہ ہندسیہ کا مجموعہ ۴ ہے اور ارقام کے مکعبوں

کا مجموعہ ۱۹۲ ہے سلسلہ دریافت کرو۔

۵۸۔ متوالی کسور اعشاریہ لامتناہی سلسلہ ہندسیہ کی ایک عمدہ مثال ہے۔

مثال (۱) ۴/۳۳ کی قیمت دریافت کرو۔

$$۴/۳۳ = ۴/۳۳ + ۴/۳۳۰ + ۴/۳۳۰۰ + =$$

$$= ۴/۳۳ + ۴/۳۳۰ + ۴/۳۳۰۰ + =$$

$$= ۴/۳۳ + ۴/۳۳۰ + ۴/۳۳۰۰ + =$$

$$یعنی ۴/۳۳ = ۴/۳۳ + ۴/۳۳۰ + ۴/۳۳۰۰ + =$$

$$= ۴/۳۳ + ۴/۳۳۰ + ۴/۳۳۰۰ + =$$

$$\frac{100}{99} \times \frac{23}{110} + \frac{2}{10} =$$

$$\frac{219}{990} = \frac{23}{990} + \frac{2}{10} =$$

۵۹۔ متوالی کسرا عشریہ کی قیمت دریافت کرنے کا قاعدہ اس

طرح ثابت ہو سکتا ہے۔

اگر ف سے غیر متوالی ہندسوں کو تعبیر کریں جن کی تعداد ط ہے اور اگر ق سے دور مکرر کو تعبیر کریں جس میں ع ہندسے شامل ہیں اور

ت = متوالی کسرا عشریہ کی قیمت تو

ت = ق ق ق ق ف د

اس لیے ۱۰ × ت = ق ق ق ق ف د

اور ۱۰ × ت = ق ق ق ق د ق ف

تفریق سے (۱۰ × ت) - ت = ق ق ف - ف

اس لیے ت = $\frac{ق ق ف - ف}{(۱۰ - ۱)}$ (۱)

اب (۱۰ - ۱) ایک ایسا عدد ہے جس میں ع دفعہ ۹ شامل ہے اس لیے معلوم ہوا کہ (۱) کا نسب نما ایک ایسا عدد ہے جس میں ہندسہ ۹ صریحاً ع دفعہ تکرار پاتا ہے اور اس کے اول یعنی دائیں طرف ط صفر ہیں۔ متوالی کسرا عشریہ کو کسر عام میں لانے کا قاعدہ حسب ذیل ہے۔

شمار کنندہ بنانے کے لیے ایسے عدد صحیح سے جو متوالی اور غیر متوالی ہندسوں سے مل کر بنا ہو وہ عدد تفریق کرو جس میں صرف غیر متوالی ہندسے شامل ہوں اور نسب نما بنانے کے لیے ایسا عدد لو جس میں ہندسہ ۹ اتنی دفعہ تکرار پائے جتنے متوالی ہندسے دور مکرر ہیں ہوں اور اس کے اول یعنی دائیں طرف اتنے صفر لکھو جتنے

غیر متوالی ہند سے ہوں۔

۴۰۔ حسابی ہندسی سلسلہ کی ن رقموں کا حاصل جمع

سلسلہ ۱، (۱+ف) ب، (۱+۲+ف) ب، (۱+۳+ف) ب،
 کی ن رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

اس سلسلہ میں ہر ایک رقم سلسلہ حسابیہ ۱، ۱+ف، ۱+۲+ف،
 اور سلسلہ ہندسیہ ۱، ب، ۲ب، ۳ب، کی مطابق رقموں کا حاصل ضرب ہے۔
 فرض کرو کہ ص سے ن رقموں کا حاصل جمع تعبیر ہوتا ہے، تب

$$ص = ۱ + (۱+ف)ب + (۱+۲+ف)ب + + \{۱ + (ن-۱)ف\}ب^{۱-ن}$$

$$بص = ۱ب + (۱+ف)ب + + \{۱ + (ن-۱)ف\}ب^{۱-ن}$$

$$+ \{۱ + (ن-۱)ف\}ب^{۱-ن}$$

عمل تفریق سے

$$ص(۱-ب) = ۱ + (فب + ف۲ب + + ف^{۱-ن}ب^{۱-ن})$$

$$- (۱ + (ن-۱)ف)ب^{۱-ن}$$

$$\therefore ص = \frac{۱}{۱-ب} + \frac{فب(۱-ب^{۱-ن})}{(۱-ب)^۲} - \frac{(۱ + (ن-۱)ف)ب^{۱-ن}}{۱-ب}$$

نتیجہ صریح :-

$$چونکہ ص = \frac{۱}{۱-ب} - \frac{فب}{(۱-ب)^۲} - \frac{(۱ + (ن-۱)ف)ب^{۱-ن}}{۱-ب}$$

اس لیے اگر ب بلحاظ عددی قیمت کے اکائی سے چھوٹا ہو تو ن کو کافی
 بڑا لینے سے ہم ب کو اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں۔
 اس صورت میں اگر یہ پایا جائے کہ مجموعہ ص کی وہ تمام رقمیں جن میں
 ب^{۱-ن} شامل ہے، ن کو کافی بڑا لینے سے اتنی چھوٹی بنائی جاسکتی ہیں کہ

ان کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے تو سلسلہ بالا کی لا انتہا رقوم کا مجموعہ

$$\frac{1}{1-b} + \frac{f}{(1-b)^2} \text{ کے مساوی ہوگا۔}$$

نوٹ۔ اس قسم کے سلسلوں کو جمع کرنے میں طالب علم کو ضابطہ مندرجہ بالا کے استعمال کرنے کی ضرورت نہیں اسے چاہیے کہ ہر ایک صورت میں نتیجہ مطلوب کو بلا واسطہ مفصل عمل سے حاصل کرے۔ مثلاً ذیل سے طریق عمل کی توضیح ہوگی۔

مثال (۱) سلسلہ $1 + \frac{2}{4} + \frac{5}{9} + \frac{8}{16} + \dots$ کی ن دیں رقم اور ن ارقام کا مجموعہ دریافت کرو۔

سلسلہ مجوزہ اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$1 + \left(\frac{1}{4}\right) \times 3 + \left(\frac{1}{9}\right) \times 5 + \left(\frac{1}{16}\right) \times 8 + \dots$$

اس سے ظاہر ہے کہ سلسلہ مجوزہ کی ہر ایک رقم سلسلہ حاسبہ $1, 3, 5, 8, \dots$ وغیرہ اور سلسلہ ہندسیہ $1, \left(\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{9}\right), \left(\frac{1}{16}\right), \dots$ وغیرہ کی مطابق رقوم کا حاصل ضرب ہے۔ اس لیے سلسلہ معلوم کی ن دیں رقم

$$= \{1 + (1-n) \times \left(\frac{1}{4}\right)\} \times \left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}$$

اگر ن رقوم کے مجموعہ کو ص سے تعبیر کیا جائے تو $\frac{1}{4}$ کی بجائے لا رکھنے سے

$$ص = 1 + لا + لا + لا + \dots + لا + (1-n) \times لا$$

$$ص لا = لا + لا + لا + \dots + لا + لا + (3-n) \times لا$$

$$+ (1-n) \times لا$$

اس لیے تفریق سے

$$ص (1-لا) = 1 + لا + لا + لا + \dots + لا + لا - (1-n) \times لا$$

$$= 1 + \{لا + لا + لا + لا + \dots + لا + لا + (1-n) \times لا\} - (1-n) \times لا$$

$$\text{چونکہ } لا = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{4} \text{ ص} = +1 - \frac{\left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^{1-n} - 1 \right\} \times 2}{\frac{1}{4} - 1} - (1-n) \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

$$= +1 - 2 \left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^{1-n} - 1 \right\} - (1-n) \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

$$= -3 + \left\{ \frac{1-n}{2} + 2 \right\} \left(\frac{1}{4} \right)^{1-n} - 3 + \frac{3+n}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^{1-n}$$

$$\text{اس لیے ص} = -4 + (3+n) \left(\frac{1}{4} \right)^{1-n} = \frac{3+n}{1-n} - 4$$

مثال (۲) اگر $لا > ۱$ تو لا متناہی سلسلہ

$$1 + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + \dots \text{کو جمع کرو۔}$$

$$\text{فرض کرو کہ ص} = 1 + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + \dots \text{تا لا متناہی}$$

$$\text{لا ص} = لا + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + \dots$$

$$\therefore \text{ص} (لا - ۱) = ۱ + لا + لا^۲ + لا^۳ + \dots = \frac{۱}{لا - ۱}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{۱}{لا - ۱}$$

مثال (۳) سلسلہ $۱ + \frac{۱}{۵} + \frac{۴}{۵} + \frac{۹}{۵} + \dots$ کو ن رقموں تک جمع کرو۔

$$\text{فرض کرو کہ ص} = ۱ + \frac{۱}{۵} + \frac{۴}{۵} + \frac{۹}{۵} + \dots + \frac{۲-n}{۱-n} \frac{۳}{۵}$$

$$\therefore \frac{۱}{۵} \text{ ص} = \frac{۱}{۵} + \frac{۴}{۵} + \frac{۹}{۵} + \dots + \frac{۲-n}{۱-n} \frac{۳}{۵}$$

$$\therefore \frac{۴}{۵} \text{ ص} = +1 - \left(\frac{۳}{۱-n} + \dots + \frac{۳}{۵} + \frac{۳}{۵} \right) - \frac{۲-n}{۵}$$

$$= \frac{۴}{۵} + 1 - \left(1 + \frac{۱}{۵} + \dots + \frac{۱}{۲-n} + \frac{۱}{۲-n} \right) - \frac{۲-n}{۵}$$

$$= \frac{۴}{۵} + 1 - \frac{\frac{۱}{1-n-1}}{\frac{۱}{۵} - 1} - \frac{۲-n}{۵}$$

$$= 1 + \frac{3}{4} - \left(1 - \frac{1}{5}\right) - \frac{3 - 5n}{5}$$

$$= \frac{4 + 5n}{5 \times 2} - \frac{4}{3}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{4 + 5n}{5 \times 14} - \frac{25}{14}$$

۶۰۔ سلسلہ ہندسیہ کی متفرق مثالیں۔

مثال (۱) اگر ص_۱ سے کسی سلسلہ ہندسیہ کی n رقموں کا مجموعہ بتعیر ہو تو ص_۱ + ص_۲ + ص_۳ + + ص_n کی قیمت دریافت کرو۔
فرض کرو کہ ۱ = رقم اول اور ب = نسبت مشترک

$$\text{ص}_n = \frac{1(1 - \text{ب}^n)}{1 - \text{ب}}$$

$$\text{اس لیے ص}_1 = \frac{1(1 - \text{ب})}{1 - \text{ب}} = \text{ص}_2 = \frac{1(1 - \text{ب}^2)}{1 - \text{ب}} = \text{ص}_3 = \frac{1(1 - \text{ب}^3)}{1 - \text{ب}} \text{ اور علیٰ ہذا القیاس}$$

$$\text{اس لیے ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3 + \dots + \text{ص}_n$$

$$= \frac{1}{1 - \text{ب}} \{ (1 - \text{ب}) + (1 - \text{ب}^2) + (1 - \text{ب}^3) + \dots + (1 - \text{ب}^n) \}$$

$$= \frac{1}{1 - \text{ب}} \{ \text{ب} + \text{ب}^2 + \text{ب}^3 + \dots + \text{ب}^n - n \}$$

$$= \frac{1}{1 - \text{ب}} \left\{ \text{ب} \frac{1 - \text{ب}^n}{1 - \text{ب}} - n \right\}$$

$$= \frac{\text{ب}(1 - \text{ب}^n)}{(1 - \text{ب})^2} - \frac{n}{1 - \text{ب}}$$

مثال (۲) سلسلہ ۵ + ۵۵ + ۵۵۵ + کی n رقموں کا حاصل جمع

دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ص مجموعہ مطلوبہ ہے۔

$$\begin{aligned}
 \text{اس لیے ص} &= ۵ + ۵۵ + ۵۵۵ + \dots + \text{ن رقموں تک} \\
 &= ۵ \{ ۱ + ۱۱ + ۱۱۱ + \dots + \text{ن رقموں تک} \} \\
 &= \frac{۵}{۹} \{ ۹ + ۹۹ + ۹۹۹ + \dots + \text{ن رقموں تک} \} \\
 &= \frac{۵}{۹} \{ (۱-۱۰) + (۱-۱۰۰) + (۱-۱۰۰۰) + \dots + \text{ن رقموں تک} \} \\
 &= \frac{۵}{۹} \{ (۱۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰۰ + \dots + \text{ن رقموں تک}) - \text{ن} \} \\
 &= \frac{۵}{۹} \left\{ \text{ن} - \frac{(۱-۱۰)۱۰}{۱-۱۰} \right\} = \frac{۵}{۹} \left\{ \text{ن} - \frac{۱۰}{۹} (۱-۱۰) \right\}
 \end{aligned}$$

مثال (۳) سلسلہ ۱ + ۵ + ۱۳ + ۲۹ + کو ن رقموں تک جمع کرو۔
فرض کرو کہ ق سے سلسلہ مجوزہ کی ن ویں رقم تعبیر ہوتی ہے۔

اور ص = ن رقموں کا مجموعہ

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{ص} &= ۱ + ۵ + ۱۳ + ۲۹ + \dots + \text{ق} \\
 \text{تیز ص} &= ۰ + ۱ + ۵ + ۱۳ + \dots + \text{ق} + \text{ق} \\
 \text{تفریق سے } ۰ &= (۱ + ۵ + ۱۳ + \dots + \text{ن رقموں تک}) - \text{ق} \\
 \text{اس لیے ق} &= ۱ + ۵ + ۱۳ + \dots + \text{ن} - ۱ - ۵ - ۱۳ - \dots - \text{ن} \\
 &= \frac{(۱-۱۰)۲}{۱-۲} + ۱ = ۲ - \frac{(۱-۱۰)۲}{۱-۲}
 \end{aligned}$$

اس لیے پہلی رقم = ۲ - ۳، دوسری رقم = ۳ - ۳، تیسری رقم = ۳ - ۳،

اور علیٰ ہذا القیاس

$$\begin{aligned}
 \text{اس لیے ص} &= (۳ - ۱ - ۳) + \dots + (۳ - ۲) + (۳ - ۲) + (۳ - ۲) \\
 &= (۳ - ۱ - ۳) + \dots + (۳ - ۲) + (۳ - ۲) + (۳ - ۲) + \dots + (۳ - ۲)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{(۱-۱۰)۲}{۱-۲} - ۳ = ۳ - \frac{(۱-۱۰)۲}{۱-۲}$$

مثال (۴) اگر ن واسطہ ہندسیہ دو متغیر و اور ج کے درمیان

۹۔ لاتناہی سلسلہ $۱ + (۱ + د) ب + (۱ + د + د) ب^۲ + \dots + (۱ + د + د + د) ب^۳ + \dots$ کا مجموعہ دریافت کرو۔ اس میں د اور ب کسور واجب ہیں۔

۱۰۔ تین اعداد سلسلہ ہندسیہ میں ہیں ان کا مجموعہ ۰ ہے اگر طرفین میں سے ہر ایک کو کم سے اور اوسط کو ۵ سے ضرب دیا جائے تو یہ حاصل ضرب سلسلہ حسابیہ میں ہوتے ہیں اعداد دریافت کرو۔

۱۱۔ کسی لاتناہی سلسلہ ہندسیہ کی پہلی دو رقموں کا مجموعہ ۵ ہے اور ہر ایک رقم اپنے مابعد کی تمام رقموں کے مجموعہ کی ۳ گنی ہے سلسلہ دریافت کرو۔

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو۔

- ۱۲۔ $۱ + ۱' + ۱'' + ۱''' + \dots$ کو ن رقموں تک
- ۱۳۔ $۱ + (۱ + ۱) + (۱ + ۱ + ۱) + (۱ + ۱ + ۱ + ۱) + \dots$ کو ن رقموں تک
- ۱۴۔ $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots + \frac{۱}{۱۲}$ کو ۱۲ رقموں تک
- ۱۵۔ $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} + \dots$ کو لاتناہی تک
- ۱۶۔ $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۰} - \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۴} - \frac{۱}{۱۶} + \dots$ کو لاتناہی تک

۱۷۔ اگر 'ا' ب 'ج' د سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(ب - ج) (ج - ا) + (ج - ا) (ا - د) + (ا - د) (د - ب) = (د - ا)$$

۱۸۔ سلسلہ $۳ + ۳۳ + ۳۳۳ + \dots$ کو ن رقموں تک جمع کرو۔

۱۹۔ $۵ + ۵۹ + ۵۹۹ + ۵۹۹۹ + \dots$ کو ن

۲۰۔ $۱ + ۴ + ۲۵ + ۷۹ + ۲۳۱ + \dots$ کو ن

۲۱۔ $۰ + ۶ + ۲۴ + ۷۸ + ۲۴۰ + \dots$ کو ن

۲۲۔ اگر ا اور د کا اوسط حسابی ان کے اوسط ہندسی کا دو چندان ہو تو

$$ثابت کرو کہ ا : د = ۲ : ۳ - ۳$$

۲۳۔ کسی سلسلہ کی رو میں رقم $(۱+۲)$ ہے، اس سلسلہ کی n رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

۲۴۔ کسی سلسلہ کی ہر ایک جفت رقم اپنی رقم ماقبل کی دو گنی ہے اور ہر ایک طاق رقم اپنی رقم ماقبل کی ج گنی ہے رقم اول ایک ہے ۲ n رقموں تک اس سلسلہ کا حاصل جمع دریافت کرو۔

۲۵۔ اگر کسی سلسلہ ہندسیہ کی پہلی رقم $= ۱$ ، نسبت مشترک $= ۲$ اور n رقموں کا حاصل جمع $= ۱۰۲۳$ ، تو n ، ۱۰۲۳ کا مجموعہ دریافت کرو۔

۲۶۔ اگر $۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰$ سے بالترتیب ان لامتناہی ہندسی سلسلوں کے مجموعے تعبیر کیے جائیں جن کی پہلی رقمیں بالترتیب $۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ + ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵ + ۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ + ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸ + ۴۹ + ۵۰ + ۵۱ + ۵۲ + ۵۳ + ۵۴ + ۵۵ + ۵۶ + ۵۷ + ۵۸ + ۵۹ + ۶۰ + ۶۱ + ۶۲ + ۶۳ + ۶۴ + ۶۵ + ۶۶ + ۶۷ + ۶۸ + ۶۹ + ۷۰ + ۷۱ + ۷۲ + ۷۳ + ۷۴ + ۷۵ + ۷۶ + ۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱ + ۸۲ + ۸۳ + ۸۴ + ۸۵ + ۸۶ + ۸۷ + ۸۸ + ۸۹ + ۹۰ + ۹۱ + ۹۲ + ۹۳ + ۹۴ + ۹۵ + ۹۶ + ۹۷ + ۹۸ + ۹۹ + ۱۰۰ = \frac{۱۰۰(۱۰۱)}{۲}$$

۲۷۔ اگر b مثبت ہو اور a سے کم ہو اور m مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ $(۱+m)a > (۱+m)b$ ۔
اس سے ثابت کرو کہ جب n لامتناہی بڑا ہو تو n b لا انتہا چھوٹا ہوگا۔

اور $\frac{1}{4}$ - $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{8}$ - $\frac{1}{12}$ - $\frac{1}{16}$ - $\frac{1}{20}$ - $\frac{1}{24}$ - $\frac{1}{30}$ - $\frac{1}{36}$ - $\frac{1}{40}$ - $\frac{1}{45}$ - $\frac{1}{48}$ - $\frac{1}{54}$ - $\frac{1}{60}$ - $\frac{1}{72}$ - $\frac{1}{80}$ - $\frac{1}{90}$ - $\frac{1}{96}$ - $\frac{1}{108}$ - $\frac{1}{120}$ - $\frac{1}{144}$ - $\frac{1}{160}$ - $\frac{1}{180}$ - $\frac{1}{192}$ - $\frac{1}{216}$ - $\frac{1}{240}$ - $\frac{1}{270}$ - $\frac{1}{288}$ - $\frac{1}{320}$ - $\frac{1}{360}$ - $\frac{1}{432}$ - $\frac{1}{480}$ - $\frac{1}{540}$ - $\frac{1}{576}$ - $\frac{1}{640}$ - $\frac{1}{720}$ - $\frac{1}{864}$ - $\frac{1}{960}$ - $\frac{1}{1080}$ - $\frac{1}{1152}$ - $\frac{1}{1280}$ - $\frac{1}{1440}$ - $\frac{1}{1728}$ - $\frac{1}{1920}$ - $\frac{1}{2160}$ - $\frac{1}{2304}$ - $\frac{1}{2560}$ - $\frac{1}{2880}$ - $\frac{1}{3200}$ - $\frac{1}{3600}$ - $\frac{1}{4096}$ - $\frac{1}{4608}$ - $\frac{1}{5120}$ - $\frac{1}{5760}$ - $\frac{1}{6400}$ - $\frac{1}{7200}$ - $\frac{1}{8000}$ - $\frac{1}{8640}$ - $\frac{1}{9600}$ - $\frac{1}{10240}$ - $\frac{1}{11088}$ - $\frac{1}{12000}$ - $\frac{1}{12800}$ - $\frac{1}{13824}$ - $\frac{1}{14400}$ - $\frac{1}{15360}$ - $\frac{1}{16384}$ - $\frac{1}{17280}$ - $\frac{1}{18304}$ - $\frac{1}{19200}$ - $\frac{1}{20480}$ - $\frac{1}{21600}$ - $\frac{1}{22937}$ - $\frac{1}{24000}$ - $\frac{1}{25600}$ - $\frac{1}{27072}$ - $\frac{1}{28800}$ - $\frac{1}{30720}$ - $\frac{1}{32768}$ - $\frac{1}{34560}$ - $\frac{1}{36400}$ - $\frac{1}{38400}$ - $\frac{1}{40960}$ - $\frac{1}{43200}$ - $\frac{1}{46080}$ - $\frac{1}{48000}$ - $\frac{1}{50176}$ - $\frac{1}{52800}$ - $\frac{1}{55296}$ - $\frac{1}{57600}$ - $\frac{1}{60480}$ - $\frac{1}{63000}$ - $\frac{1}{65536}$ - $\frac{1}{68160}$ - $\frac{1}{70900}$ - $\frac{1}{73728}$ - $\frac{1}{76640}$ - $\frac{1}{79648}$ - $\frac{1}{82752}$ - $\frac{1}{85960}$ - $\frac{1}{89280}$ - $\frac{1}{92704}$ - $\frac{1}{96240}$ - $\frac{1}{99888}$ - $\frac{1}{103648}$ - $\frac{1}{107520}$ - $\frac{1}{111520}$ - $\frac{1}{115648}$ - $\frac{1}{119888}$ - $\frac{1}{124248}$ - $\frac{1}{128728}$ - $\frac{1}{133328}$ - $\frac{1}{138048}$ - $\frac{1}{142888}$ - $\frac{1}{147848}$ - $\frac{1}{152928}$ - $\frac{1}{158128}$ - $\frac{1}{163448}$ - $\frac{1}{168888}$ - $\frac{1}{174448}$ - $\frac{1}{180128}$ - $\frac{1}{185928}$ - $\frac{1}{191848}$ - $\frac{1}{197888}$ - $\frac{1}{204048}$ - $\frac{1}{210328}$ - $\frac{1}{216728}$ - $\frac{1}{223248}$ - $\frac{1}{229888}$ - $\frac{1}{236648}$ - $\frac{1}{243528}$ - $\frac{1}{250528}$ - $\frac{1}{257648}$ - $\frac{1}{264888}$ - $\frac{1}{272248}$ - $\frac{1}{279728}$ - $\frac{1}{287328}$ - $\frac{1}{295048}$ - $\frac{1}{302888}$ - $\frac{1}{310848}$ - $\frac{1}{318928}$ - $\frac{1}{327128}$ - $\frac{1}{335448}$ - $\frac{1}{343888}$ - $\frac{1}{352448}$ - $\frac{1}{361128}$ - $\frac{1}{369928}$ - $\frac{1}{378848}$ - $\frac{1}{387888}$ - $\frac{1}{397048}$ - $\frac{1}{406328}$ - $\frac{1}{415728}$ - $\frac{1}{425248}$ - $\frac{1}{434888}$ - $\frac{1}{444648}$ - $\frac{1}{454528}$ - $\frac{1}{464528}$ - $\frac{1}{474648}$ - $\frac{1}{484888}$ - $\frac{1}{495248}$ - $\frac{1}{505728}$ - $\frac{1}{516328}$ - $\frac{1}{527048}$ - $\frac{1}{537888}$ - $\frac{1}{548848}$ - $\frac{1}{559928}$ - $\frac{1}{571128}$ - $\frac{1}{582448}$ - $\frac{1}{593888}$ - $\frac{1}{605448}$ - $\frac{1}{617128}$ - $\frac{1}{628928}$ - $\frac{1}{640848}$ - $\frac{1}{652888}$ - $\frac{1}{665048}$ - $\frac{1}{677328}$ - $\frac{1}{689728}$ - $\frac{1}{702248}$ - $\frac{1}{714888}$ - $\frac{1}{727648}$ - $\frac{1}{740528}$ - $\frac{1}{753528}$ - $\frac{1}{766648}$ - $\frac{1}{779888}$ - $\frac{1}{793248}$ - $\frac{1}{806728}$ - $\frac{1}{820328}$ - $\frac{1}{834048}$ - $\frac{1}{847888}$ - $\frac{1}{861848}$ - $\frac{1}{875928}$ - $\frac{1}{890128}$ - $\frac{1}{904448}$ - $\frac{1}{918888}$ - $\frac{1}{933448}$ - $\frac{1}{948128}$ - $\frac{1}{962928}$ - $\frac{1}{977848}$ - $\frac{1}{992888}$ - $\frac{1}{1008048}$ - $\frac{1}{1023328}$ - $\frac{1}{1038728}$ - $\frac{1}{1054248}$ - $\frac{1}{1069888}$ - $\frac{1}{1085648}$ - $\frac{1}{1101528}$ - $\frac{1}{1117528}$ - $\frac{1}{1133648}$ - $\frac{1}{1149888}$ - $\frac{1}{1166248}$ - $\frac{1}{1182728}$ - $\frac{1}{1199328}$ - $\frac{1}{1216048}$ - $\frac{1}{1232888}$ - $\frac{1}{1249848}$ - $\frac{1}{1266928}$ - $\frac{1}{1284128}$ - $\frac{1}{1301448}$ - $\frac{1}{1318888}$ - $\frac{1}{1336448}$ - $\frac{1}{1354128}$ - $\frac{1}{1371928}$ - $\frac{1}{1389848}$ - $\frac{1}{1407888}$ - $\frac{1}{1426048}$ - $\frac{1}{1444328}$ - $\frac{1}{1462728}$ - $\frac{1}{1481248}$ - $\frac{1}{1499888}$ - $\frac{1}{1518648}$ - $\frac{1}{1537528}$ - $\frac{1}{1556528}$ - $\frac{1}{1575648}$ - $\frac{1}{1594888}$ - $\frac{1}{1614248}$ - $\frac{1}{1633728}$ - $\frac{1}{1653328}$ - $\frac{1}{1673048}$ - $\frac{1}{1692888}$ - $\frac{1}{1712848}$ - $\frac{1}{1732928}$ - $\frac{1}{1753128}$ - $\frac{1}{1773448}$ - $\frac{1}{1793888}$ - $\frac{1}{1814448}$ - $\frac{1}{1835128}$ - $\frac{1}{1855928}$ - $\frac{1}{1876848}$ - $\frac{1}{1897888}$ - $\frac{1}{1919048}$ - $\frac{1}{1940328}$ - $\frac{1}{1961728}$ - $\frac{1}{1983248}$ - $\frac{1}{2004888}$ - $\frac{1}{2026648}$ - $\frac{1}{2048528}$ - $\frac{1}{2070528}$ - $\frac{1}{2092648}$ - $\frac{1}{2114888}$ - $\frac{1}{2137248}$ - $\frac{1}{2159728}$ - $\frac{1}{2182328}$ - $\frac{1}{2205048}$ - $\frac{1}{2227888}$ - $\frac{1}{2250848}$ - $\frac{1}{2273928}$ - $\frac{1}{2297128}$ - $\frac{1}{2320448}$ - $\frac{1}{2343888}$ - $\frac{1}{2367448}$ - $\frac{1}{2391128}$ - $\frac{1}{2414928}$ - $\frac{1}{2438848}$ - $\frac{1}{2462888}$ - $\frac{1}{2487048}$ - $\frac{1}{2511328}$ - $\frac{1}{2535728}$ - $\frac{1}{2560248}$ - $\frac{1}{2584888}$ - $\frac{1}{2609648}$ - $\frac{1}{2634528}$ - $\frac{1}{2659528}$ - $\frac{1}{2684648}$ - $\frac{1}{2709888}$ - $\frac{1}{2735248}$ - $\frac{1}{2760728}$ - $\frac{1}{2786328}$ - $\frac{1}{2812048}$ - $\frac{1}{2837888}$ - $\frac{1}{2863848}$ - $\frac{1}{2889928}$ - $\frac{1}{2916128}$ - $\frac{1}{2942448}$ - $\frac{1}{2968888}$ - $\frac{1}{2995448}$ - $\frac{1}{3022128}$ - $\frac{1}{3048928}$ - $\frac{1}{3075848}$ - $\frac{1}{3102888}$ - $\frac{1}{3129948}$ - $\frac{1}{3157128}$ - $\frac{1}{3184428}$ - $\frac{1}{3211848}$ - $\frac{1}{3239388}$ - $\frac{1}{3267048}$ - $\frac{1}{3294828}$ - $\frac{1}{3322728}$ - $\frac{1}{3350748}$ - $\frac{1}{3378888}$ - $\frac{1}{3407148}$ - $\frac{1}{3435528}$ - $\frac{1}{3464028}$ - $\frac{1}{3492648}$ - $\frac{1}{3521388}$ - $\frac{1}{3550248}$ - $\frac{1}{3579228}$ - $\frac{1}{3608328}$ - $\frac{1}{3637548}$ - $\frac{1}{3666888}$ - $\frac{1}{3696348}$ - $\frac{1}{3725928}$ - $\frac{1}{3755628}$ - $\frac{1}{3785448}$ - $\frac{1}{3815388}$ - $\frac{1}{3845448}$ - $\frac{1}{3875628}$ - $\frac{1}{3905928}$ - $\frac{1}{3936348}$ - $\frac{1}{3966888}$ - $\frac{1}{3997548}$ - $\frac{1}{4028328}$ - $\frac{1}{4059228}$ - $\frac{1}{4090248}$ - $\frac{1}{4121388}$ - $\frac{1}{4152648}$ - $\frac{1}{4184028}$ - $\frac{1}{4215528}$ - $\frac{1}{4247148}$ - $\frac{1}{4278888}$ - $\frac{1}{4310748}$ - $\frac{1}{4342728}$ - $\frac{1}{4374828}$ - $\frac{1}{4407048}$ - $\frac{1}{4439388}$ - $\frac{1}{4471848}$ - $\frac{1}{4504428}$ - $\frac{1}{4537128}$ - $\frac{1}{4569948}$ - $\frac{1}{4602888}$ - $\frac{1}{4635948}$ - $\frac{1}{4669128}$ - $\frac{1}{4702428}$ - $\frac{1}{4735848}$ - $\frac{1}{4769388}$ - $\frac{1}{4803048}$ - $\frac{1}{4836828}$ - $\frac{1}{4870728}$ - $\frac{1}{4904748}$ - $\frac{1}{4938888}$ - $\frac{1}{4973148}$ - $\frac{1}{5007528}$ - $\frac{1}{5042028}$ - $\frac{1}{5076648}$ - $\frac{1}{5111388}$ - $\frac{1}{5146248}$ - $\frac{1}{5181228}$ - $\frac{1}{5216328}$ - $\frac{1}{5251548}$ - $\frac{1}{5286888}$ - $\frac{1}{5322348}$ - $\frac{1}{5357928}$ - $\frac{1}{5393628}$ - $\frac{1}{5429448}$ - $\frac{1}{5465388}$ - $\frac{1}{5501448}$ - $\frac{1}{5537628}$ - $\frac{1}{5573928}$ - $\frac{1}{5610348}$ - $\frac{1}{5646888}$ - $\frac{1}{5683548}$ - $\frac{1}{5720328}$ - $\frac{1}{5757228}$ - $\frac{1}{5794248}$ - $\frac{1}{5831388}$ - $\frac{1}{5868648}$ - $\frac{1}{5906028}$ - $\frac{1}{5943528}$ - $\frac{1}{5981148}$ - $\frac{1}{6018888}$ - $\frac{1}{6056748}$ - $\frac{1}{6094728}$ - $\frac{1}{6132828}$ - $\frac{1}{6171048}$ - $\frac{1}{6209388}$ - $\frac{1}{6247848}$ - $\frac{1}{6286428}$ - $\frac{1}{6325128}$ - $\frac{1}{6363948}$ - $\frac{1}{6402888}$ - $\frac{1}{6441948}$ - $\frac{1}{6481128}$ - $\frac{1}{6520428}$ - $\frac{1}{6559848}$ - $\frac{1}{6599388}$ - $\frac{1}{6639048}$ - $\frac{1}{6678828}$ - $\frac{1}{6718728}$ - $\frac{1}{6758748}$ - $\frac{1}{6798888}$ - $\frac{1}{6839148}$ - $\frac{1}{6879528}$ - $\frac{1}{6919948}$ - $\frac{1}{6960488}$ - $\frac{1}{7001148}$ - $\frac{1}{7041928}$ - $\frac{1}{7082828}$ - $\frac{1}{7123848}$ - $\frac{1}{7164988}$ - $\frac{1}{7206248}$ - $\frac{1}{7247628}$ - $\frac{1}{7289128}$ - $\frac{1}{7330748}$ - $\frac{1}{7372488}$ - $\frac{1}{7414348}$ - $\frac{1}{7456328}$ - $\frac{1}{7498428}$ - $\frac{1}{7540648}$ - $\frac{1}{7582988}$ - $\frac{1}{7625448}$ - $\frac{1}{7668028}$ - $\frac{1}{7710728}$ - $\frac{1}{7753548}$ - $\frac{1}{7796488}$ - $\frac{1}{7839548}$ - $\frac{1}{7882728}$ - $\frac{1}{7926028}$ - $\frac{1}{7969448}$ - $\frac{1}{8012988}$ - $\frac{1}{8056648}$ - $\frac{1}{8100428}$ - $\frac{1}{8144328}$ - $\frac{1}{8188348}$ - $\frac{1}{8232488}$ - $\frac{1}{8276748}$ - $\frac{1}{8321128}$ - $\frac{1}{8365628}$ - $\frac{1}{8410248}$ - $\frac{1}{8454988}$ - $\frac{1}{8499848}$ - $\frac{1}{8544828}$ - $\frac{1}{8589928}$ - $\frac{1}{8635148}$ - $\frac{1}{8680488}$ - $\frac{1}{8725948}$ - $\frac{1}{8771528}$ - $\frac{1}{8817228}$ - $\frac{1}{8863048}$ - $\frac{1}{8908988}$ - $\frac{1}{8955048}$ - $\frac{1}{9001228}$ - $\frac{1}{9047528}$ - $\frac{1}{9093948}$ - $\frac{1}{9140488}$ - $\frac{1}{9187148}$ - $\frac{1}{9233928}$ - $\frac{1}{9280828}$ - $\frac{1}{9327848}$ - $\frac{1}{9374988}$ - $\frac{1}{9422248}$ - $\frac{1}{9469628}$ - $\frac{1}{9517128}$ - $\frac{1}{9564748}$ - $\frac{1}{9612488}$ - $\frac{1}{9660348}$ - $\frac{1}{9708328}$ - $\frac{1}{9756428}$ - $\frac{1}{9804648}$ - $\frac{1}{9852988}$ - $\frac{1}{9901448}$ - $\frac{1}{9950028}$ - $\frac{1}{10000000}$ - $\frac{1}{10050000}$ - $\frac{1}{10100000}$ - $\frac{1}{10150000}$ - $\frac{1}{10200000}$ - $\frac{1}{10250000}$ - $\frac{1}{10300000}$ - $\frac{1}{10350000}$ - $\frac{1}{10400000}$ - $\frac{1}{10450000}$ - $\frac{1}{10500000}$ - $\frac{1}{10550000}$ - $\frac{1}{10600000}$ - $\frac{1}{10650000}$ - $\frac{1}{10700000}$ - $\frac{1}{10750000}$ - $\frac{1}{10800000}$ - $\frac{1}{10850000}$ - $\frac{1}{10900000}$ - $\frac{1}{10950000}$ - $\frac{1}{11000000}$ - $\frac{1}{11050000}$ - $\frac{1}{11100000}$ - $\frac{1}{11150000}$ - $\frac{1}{11200000}$ - $\frac{1}{11250000}$ - $\frac{1}{11300000}$ - $\frac{1}{11350000}$ - $\frac{1}{11400000}$ - $\frac{1}{11450000}$ - $\frac{1}{11500000}$ - $\frac{1}{11550000}$ - $\frac{1}{11600000}$ - $\frac{1}{11650000}$ - $\frac{1}{11700000}$ - $\frac{1}{11750000}$ - $\frac{1}{11800000}$ - $\frac{1}{11850000}$ - $\frac{1}{11900000}$ - $\frac{1}{11950000}$ - $\frac{1}{12000000}$ - $\frac{1}{12050000}$ - $\frac{1}{12100000}$ - $\frac{1}{12150000}$ - $\frac{1}{12200000}$ - $\frac{1}{12250000}$ - $\frac{1}{12300000}$ - $\frac{1}{12350000}$ - $\frac{1}{12400000}$ - $\frac{1}{12450000}$ - $\frac{1}{12500000}$ - $\frac{1}{12550000}$ - $\frac{1}{12600000}$ - $\frac{1}{12650000}$ - $\frac{1}{12700000}$ - $\frac{1}{12750000}$ - $\frac{1}{12800000}$ - $\frac{1}{12850000}$ - $\frac{1}{12900000}$ - $\frac{1}{12950000}$ - $\frac{1}{13000000}$ - $\frac{1}{13050000}$ - $\frac{1}{13100000}$ - $\frac{1}{13150000}$ - $\frac{1}{13200000}$ - $\frac{1}{13250000}$ - $\frac{1}{13300000}$ - $\frac{1}{13350000}$ - $\frac{1}{13400000}$ - $\frac{1}{13450000}$ - $\frac{1}{13500000}$ - $\frac{1}{13550000}$ - $\frac{1}{13600000}$ - $\frac{1}{13650000}$ - $\frac{1}{13700000}$ - $\frac{1}{13750000}$ - $\frac{1}{13800000}$ - $\frac{1}{13850000}$ - $\frac{1}{13900000}$ - $\frac{1}{13950000}$ - $\frac{1}{14000000}$ - $\frac{1}{14050000}$ - $\frac{1}{14100000}$ - $\frac{1}{14150000}$ - $\frac{1}{14200000}$ - $\frac{1}{14250000}$ - $\frac{1}{14300000}$ - $\frac{1}{14350000}$ - $\frac{1}{14400000}$ - $\frac{1}{14450000}$ - $\frac{1}{14500000}$ - $\frac{1}{14550000}$ - $\frac{1}{14600000}$ - $\frac{1}{14650000}$ - $\frac{1}{14700000}$ - $\frac{1}{14750000}$ - $\frac{1}{14800000}$ - $\frac{1}{14850000}$ - $\frac{1}{14900000}$ - $\frac{1}{14950000}$ - $\frac{1}{15000000}$ - $\frac{1}{15050000}$ - $\frac{1}{15100000}$ - $\frac{1}{15150000}$ - $\frac{1}{15200000}$ - $\frac{1}{15250000}$ - $\frac{1}{15300000}$ - $\frac{1}{15350000}$ - $\frac{1}{15400000}$ - $\frac{1}{15450000}$ - $\frac{1}{15500000}$ - $\frac{1}{15550000}$ - $\frac{1}{15600000}$ - $\frac{1}{15650000}$ - $\frac{1}{15700000}$ - $\frac{1}{15750000}$ - $\frac{1}{15800000}$ - $\frac{1}{15850000}$ - $\frac{1}{15900000}$ - $\frac{1}{15950000}$ - $\frac{1}{16000000}$ - $\frac{1}{16050000}$ - $\frac{1}{16100000}$ - $\frac{1}{16150000}$ - $\frac{1}{16200000}$ - $\frac{1}{16250000}$ - $\frac{1}{16300000}$ - $\frac{1}{16350000}$ - $\frac{1}{16400000}$ - $\frac{1}{16450000}$ - $\frac{1}{16500000}$ - $\frac{1}{16550000}$ - $\frac{1}{16600000}$ - $\frac{1}{16650000}$ - $\frac{1}{16700000}$ - $\frac{1}{16750000}$ - $\frac{1}{16800000}$ - $\frac{1}{16850000}$ - $\frac{1}{16900000}$ - $\frac{1}{16950000}$ - $\frac{1}{17000000}$ - $\frac{1}{17050000}$ - $\frac{1}{17100000}$ - $\frac{1}{17150000}$ - $\frac{1}{17200000}$ - $\frac{1}{17250000}$ - $\frac{1}{17300000}$ - $\frac{1}{17350000}$ - $\frac{1}{17400000}$ - $\frac{1}{17450000}$ - $\frac{1}{17500000}$ - $\frac{1}{17550000}$ - $\frac{1}{17600000}$ - $\frac{1}{17650000}$ - $\frac{1}{17700000}$ - $\frac{1}{17750000}$ - $\frac{1}{17800000}$ - $\frac{1}{17850000}$ - $\frac{1}{17900000}$ - $\frac{1}{17950000}$ - $\frac{1}{18000000}$ - $\frac{1}{18050000}$ - $\frac{1}{18100000}$ - $\frac{1}{18150000}$ - $\frac{1}{18200000}$ - $\frac{1}{18250000}$ - $\frac{1}{18300000}$ - $\frac{1}{18350000}$ - $\frac{1}{18400000}$ - $\frac{1}{18450000}$ - $\frac{1}{18500000}$ - $\frac{1}{18550000}$ - $\frac{1}{18600000}$ - $\frac{1}{18650000}$ - $\frac{1}{18700000}$ - $\frac{1}{18750000}$ - $\frac{1}{18800000}$ - $\frac{1}{18850000}$ - $\frac{1}{18900000}$ - $\frac{1}{18950000}$ - $\frac{1}{19000000}$ - $\frac{1}{19050000}$ - $\frac{1}{19100000}$ - $\frac{1}{19150000}$ - $\frac{1}{19200000}$ - $\frac{1}{19250000}$ - $\frac{1}{19300000}$ - $\frac{1}{19350000}$ - $\frac{1}{19400000}$ - $\frac{1}{19450000}$ - $\frac{1}{19500000}$ - $\frac{1}{19550000}$ - $\frac{1}{19600000}$ - $\frac{1}{19650000}$ - $\frac{1}{19700000}$ - $\frac{1}{19750000}$ - $\frac{1}{19800000}$ - $\frac{1}{19850000}$ - $\frac{1}{19900000}$ - $\frac{1}{19950000}$ - $\frac{1}{20000000}$ - $\frac{1}{20050000}$ - $\frac{1}{20100000}$ - $\frac{1}{20150000}$ - $\frac{1}{20200000}$ - $\frac{1}{20250000}$ - $\frac{1}{20300000}$ - $\frac{1}{20350000}$ - $\frac{1}{20400000}$ - $\frac{1}{20450000}$ - $\frac{1}{20500000}$ - $\frac{1}{20550000}$

تب $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔

اگر ہم سلسلہ مندرجہ بالا کے فرق مشترک کو بہ سے تعبیر کریں تو

$$\frac{1}{5} = 22 \text{ ویں رقم} = \frac{1}{5} + 21 \text{ بہ جس سے بہ} = \frac{1}{21} = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{21}$$

$$\text{اس لیے } \frac{22}{105} = \frac{1}{21} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{31}{105} = \frac{2}{21} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{36}{105} = \frac{3}{21} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

.....

$$\frac{121}{105} = \frac{1}{21} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

اس لیے اواسط مطلوبہ $\frac{105}{24}$ ، $\frac{105}{31}$ ، $\frac{105}{36}$ $\frac{105}{121}$ ہیں۔

مثال (۲) ۱ اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان ۱۸ اواسط موسیقیہ مندرج کرو۔

فرض کرو کہ $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{18}$ اواسط مطلوبہ ہیں۔

تب $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{18}$ سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔

اگر بہ = فرق مشترک تو $20 = 20$ ویں رقم = $1 + 19$ بہ جس سے بہ = ۱

$$\text{اس لیے } \frac{1}{2} = 1 + بہ = 2 = \frac{1}{2}، 2 = 1 + بہ = 3 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = 1 + بہ = 4 = \frac{1}{4}، 4 = 1 + بہ = 5 = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{18} = 20 - بہ = 19 = \frac{1}{19}$$

پس اداسط مطلوبہ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$ ہیں۔
 مثال (۳) اور $\frac{1}{4}$ کے درمیان ۴۰ اداسط موسیقیتہ مخرج کردہ۔
 چونکہ ۶ ایک ایسے سلسلہ حسابیہ کی ۴۲ ویں رقم ہے جس کی رقم اولی $\frac{1}{2}$ ہے
 اس لیے $6 = \frac{1}{2} + 41$ ف جہاں ف فرق مشترک ہے یعنی $F = \frac{1}{2}$
 پس اداسط حسابیہ $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \frac{41}{2}$ ہوں گی۔

اس لیے اداسط موسیقیتہ $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{41}{4}$ ہیں۔

مثال (۴) سلسلہ $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \dots, \frac{41}{9}$ وغیرہ کی ساتویں رقم دریافت کرو۔
 رقموں کے متکافی $\frac{1}{9}, \frac{14}{9}, \frac{16}{9}$ وغیرہ سلسلہ حسابیہ میں ہیں جس سے
 ظاہر ہے کہ سلسلہ مجوزہ موسیقی سلسلہ ہے۔ اس لیے اس کی ساتویں رقم
 سلسلہ حسابیہ $\frac{1}{9}, \frac{14}{9}, \frac{16}{9}$ وغیرہ کی ساتویں رقم کے مقلوب کے برابر ہے۔
 اب چونکہ اس سلسلہ کا فرق مشترک $= \frac{1}{9}$ اور رقم اول $= \frac{1}{9}$

اس لیے ساتویں رقم $= \frac{1}{9} - \frac{1}{9} \times 6 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ اس لیے سلسلہ مجوزہ کی

ساتویں رقم $= \frac{4}{3}$

مثال (۵) ایک سلسلہ موسیقیتہ کی پانچویں رقم $\frac{1}{5}$ ہے اور نویں رقم
 $\frac{1}{5}$ اس کی پہلی تین رقمیں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ متناظر سلسلہ حسابیہ کی پہلی رقم ۱ ہے اور فرق مشترک

ف، تب $\frac{1}{5} =$ سلسلہ حسابیہ کی پانچویں رقم $= 1 + 4F$ (۱)

اور $2 =$ سلسلہ حسابیہ کی نویں رقم $= 1 + 8F$ (۲)

(۲) سے (۱) کو تفریق کرتے سے $4F = \frac{1}{5} - 1$ اس لیے $F = -\frac{1}{20}$

اس لیے (۲) سے $1 = 8F + 2 = 3$

پس متناظر سلسلہ حسابیہ کی پہلی تین رقمیں $3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{20}$

یعنی ۳، $\frac{۲۳}{۸}$ ، $\frac{۱۱}{۴}$ ہیں۔

اس لیے سلسلہ موسیقی کی پہلی تین رقمیں $\frac{۱}{۴}$ ، $\frac{۸}{۲۳}$ ، $\frac{۱۱}{۴}$ ہیں۔
۶۵۔ دو مثبت حقیقی مقادیر ۱ اور ب کے درمیان حسابی ہندسی اور موسیقی اواسط بالترتیب ح، ھ، م ہیں ان کا باہمی ربط دریافت کرو۔

(۱) $\frac{۱+ب}{۲} = ح$ ہمیں معلوم ہے کہ ح

(۲) $\frac{۱+۲ب}{۲} = ھ$

(۳) $\frac{۱+۲ب}{۲} = م$ اور

اس لیے ح م = $\frac{۱+ب}{۲} \times \frac{۱+۲ب}{۲} = ۱+ب = ھ$

جس سے ظاہر ہے کہ ھ اوسط ہندسی ہے ح اور م کے درمیان۔
یعنی ح، ھ، م سلسلہ ہندسیہ میں ہیں

نیز ح - ھ = $\frac{۱+ب}{۲} - \frac{۱+۲ب}{۲} = \frac{۱-ب}{۲}$

= $\frac{(۱-ب)}{۲}$ جو مثبت ہے اگر ۱ اور ب

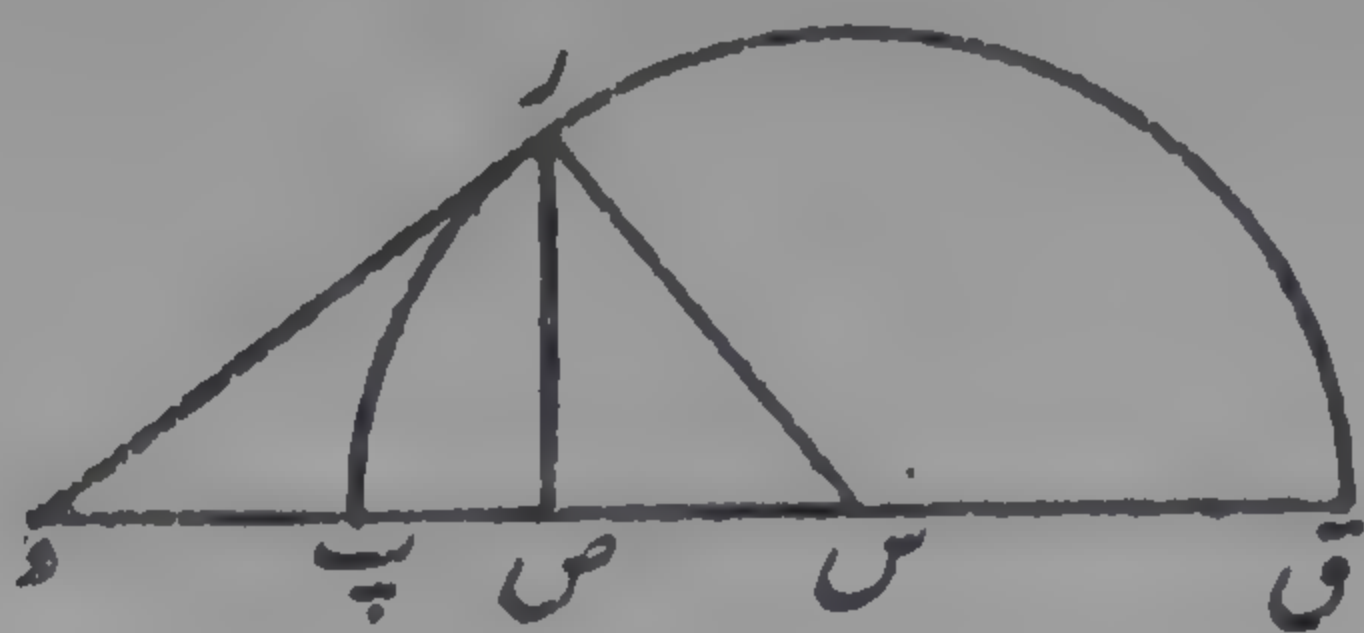
مثبت مقداریں ہوں۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہ حقیقی مثبت مقداروں کا اوسط حسابی ان کے اوسط ہندسی سے بڑا ہوتا ہے۔

نیز مساوات ھ = ح م سے ہم دیکھتے ہیں کہ ھ کی قیمت ح اور م کے درمیان واقع ہے اور اوپر یہ ثابت ہو چکا ہے کہ $ھ < ح$

اس لیے $ھ < م$ ، یعنی $ھ < م < ح$ پس معلوم ہوا کہ دو حقیقی مثبت

مقداروں کے اواسط حسابیہ ہندسیہ اور موسیقی گھٹتے ہوئے سلسلہ میں ہوتے ہیں۔

اب ہم اواسط ح، ھ، م کی ہندسی تعبیر بیان کریں گے۔



۶۶۔ سلسلوں کے متفرق سوالات کے حل کرنے میں عام عقل اور فراست کے لیے کافی جگہ ہے ذیل کے چند اشارات طالب علم کو

مفید ثابت ہونگے۔

(۱) اگر سلسلہ حسابیہ کی تمام رقموں میں ایک ہی مقدار جمع یا منفی کر دی جائے تو ایک نیا سلسلہ حسابیہ پیدا ہوگا جس کا فرق مشترک وہی ہوگا جو اصلی سلسلے کا تھا۔

(۲) اگر سلسلہ حسابیہ کی تمام رقموں کو ایک ہی مقدار سے ضرب دی جائے یا ایک ہی مقدار پر تقسیم کر دیا جائے تو ایک نیا سلسلہ حسابیہ پیدا ہوگا مگر اس کا فرق مشترک وہ نہ ہوگا جو اصلی سلسلہ حسابیہ کا تھا۔

(۳) اگر سلسلہ ہندسیہ کی تمام رقموں کو ایک ہی مقدار سے ضرب دی جائے یا ایک ہی مقدار پر تقسیم کر دیا جائے تو ایک نیا سلسلہ ہندسیہ پیدا ہوگا۔ اور اس کی نسبت مشترک وہی ہوگی جو پہلے سلسلے کی تھی۔

(۴) اگر 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' وغیرہ سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو تناسب مسلسل میں ہونگے کیونکہ ہندسی سلسلہ کی تعریف سے

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = \dots = \frac{د}{ه} \text{ جہاں نسبت مشترک}$$

ہے برعکس اس کے جو مقادیر تناسب مسلسل میں ہوں ان کو ہم سلسلہ 'لا'، 'لا'، 'لا'، 'لا' سے تعبیر کر سکتے ہیں۔

مثال (۱) اگر 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ مقادیر 'ب' + 'ج'، 'ج' + 'د'، 'د' + 'ا'، 'ا' + 'ب' سلسلہ موسیقیہ میں ہونگی۔

ہر ایک رقم میں 'ا' + 'ب' + 'ج' + 'د' جمع کرنے سے معلوم ہوگا کہ

$$\begin{aligned} & 'ا' + 'ا' + 'ب' + 'ب' + 'ج' + 'ج' + 'د' + 'د' + 'ا' + 'ب' + 'ج' + 'د' \\ & 'ج' + 'ا' + 'ب' + 'ب' + 'ج' + 'ج' + 'د' + 'د' + 'ا' + 'ب' + 'ج' + 'د' \end{aligned}$$

یعنی ('ا' + 'ب') ('ا' + 'ج') ('ب' + 'ج') ('ب' + 'د') ('ج' + 'د') ('ا' + 'د') ('ا' + 'ب')

سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔ ہر ایک رقم کو ('ا' + 'ب') ('ب' + 'ج') ('ج' + 'د') ('ا' + 'د') پر

تقسیم کرو۔

پس $\frac{1}{ب+ج}$ ، $\frac{1}{ج+د}$ ، $\frac{1}{د+ب}$ سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔

یعنی ب+ج، ج+د، د+ب سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

مثال (۲) اگر کسی سلسلہ حسابیہ میں خ = آخری رقم، ف = فرق مشترک، ص = حاصل جمع ن ارقام اور ۸ ف ص = (ف + ۲ خ) تو ثابت کرو کہ ف = ۲ جہاں ۱ رقم اول ہے۔

چونکہ مساوات مذکورہ بالا ن کی ہر قیمت کے لیے درست ہے اس لیے فرض کرو کہ ن = ۱ تب ۱ = خ = ص ان قیمتوں کو مساوات میں رکھنے سے

$$۸ ف = (ف + ۲) یعنی (ف - ۲) = ۰ یعنی ف = ۲$$

مثال (۳) اگر کسی سلسلہ حسابیہ کی پ، ق، ر، س، ویں رقیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ پ-ق، ق-ر، ر-س سلسلہ ہندسیہ میں ہیں۔

معمولی ترقیم کے مطابق شرائط سوال سے ظاہر ہے کہ

$$\frac{۱ + (پ-۱)ف}{۱ + (ق-۱)ف} = \frac{۱ + (ق-۱)ف}{۱ + (ر-۱)ف}$$

$$\frac{۱ + (ر-۱)ف}{۱ + (س-۱)ف} =$$

$$\frac{\{۱ + (پ-۱)ف\} - \{۱ + (ق-۱)ف\}}{\{۱ + (ق-۱)ف\} - \{۱ + (ر-۱)ف\}} =$$

$$\frac{پ-ق}{ق-ر} = \frac{\{۱ + (ق-۱)ف\} - \{۱ + (ر-۱)ف\}}{\{۱ + (ر-۱)ف\} - \{۱ + (س-۱)ف\}}$$

اس لیے ثابت ہوا کہ پ-ق-ق-ر-س سلسلہ ہندسیہ میں ہیں۔
مثال (۴) اگر 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ر' سلسلہ موسیقیہ کی پانچ متصل قیمتیں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(1+r)(r+b)(b+c)(c+d) = 2c(r+d)(b+c) \dots (1)$$

$$\text{فرض کرو کہ } 1 = \frac{a}{c-2p}, b = \frac{a}{p-c}, c = \frac{a}{c-p}, d = \frac{a}{c+p}$$

$$r = \frac{a}{c+2p}$$

'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ر' کی یہ قیمتیں درج کرنے سے رشتہ (۱) کی دائیں جانب

$$= \left(\frac{a}{c+2p} + \frac{a}{c-p} \right) \left(\frac{a}{c-p} + \frac{a}{c+p} \right) \left(\frac{a}{c-2p} + \frac{a}{c+p} \right) =$$

$$= \frac{2(a^2 - c^2)(c^2 - p^2)}{c(c-2p)(c+p)(c+p)} =$$

اسی طرح رشتہ (۱) کی بائیں جانب

$$= \frac{2}{c} \left(\frac{a}{c+2p} + \frac{a}{c-p} \right) \left(\frac{a}{c+p} + \frac{a}{c+p} \right) =$$

$$= \frac{2}{c} \frac{2(a^2 - c^2)(c^2 - p^2)}{(c-2p)(c+p)(c+p)} =$$

اس لیے ثابت ہوا کہ دیا ہوا رشتہ (۱) درست ہے۔

امثلہ نمبر (۶) ۱

۱ - ذیل کے ہر ایک سلسلہ کی چوتھی رقم دریافت کرو۔

$$(1) \quad 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$$

$$(2) \quad 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$$

..... (۳) $۲, ۲\frac{1}{۲}, ۳\frac{1}{۲}$

۲- دو واسطہ موسیقیہ ۵ اور ۱۱ کے درمیان مندرج کرو۔

۳- چار $\frac{۲}{۳}$ اور $\frac{۲}{۱۳}$ $\frac{۲}{۳}$ $\frac{۲}{۱۳}$ $\frac{۲}{۳}$ $\frac{۲}{۱۳}$

۴- اگر دو اعداد کے درمیان ۱۲ اور $\frac{۳}{۵}$ ۹ بالترتیب ہندسی اور موسیقی اوسط ہوں تو ان اعداد کو دریافت کرو۔

۵- اگر دو مقداروں کے اوسط موسیقی اور اوسط ہندسی کی نسبت ۱۲:۱۳ ہو تو ثابت کرو کہ ان مقداروں کی یا ہی نسبت ۲:۹ ہے۔

۶- اگر ا ب ج سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$۱:۱-۱ = ب = ۱+۱:ج:۱-ج$$

۷- اگر ایک سلسلہ موسیقی کی م ویں رقم ن ہو اور ن ویں رقم م ہو تو ثابت کرو کہ اس کی (م+ن) ویں رقم $\frac{م \times ن}{م+ن}$ ہوگی۔

۸- اگر ا اور ج کا اوسط موسیقی ب ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{ج} + \frac{۱}{ا} = \frac{۱}{ب-۱} + \frac{۱}{ب+۱}$$

۹- سلسلہ موسیقیہ میں تین اعداد کا مجموعہ ۳۶۹ ہے اور ان کے مربعوں کا مجموعہ ۴۶۹ انہیں دریافت کرو۔

۱۰- دو اعداد کا اوسط حسابی ان کے اوسط ہندسی سے بقدر $\frac{۳}{۲}$ کے زیادہ ہے اور اوسط ہندسی ان کے اوسط موسیقی سے بقدر $\frac{۶}{۵}$ کے زیادہ ہے اعداد دریافت کرو۔

۱۱- دو اعداد کے حسابی اور ہندسی اواسط کے مربعوں کا فرق ۴۰۰ ہے اور ان کے ہندسی اور موسیقی اواسط کے مربعوں کا فرق ۴۴ ہے اعداد دریافت کرو۔

۱۲- دو اعداد کے حسابی اور ہندسی اواسط کا فرق ۱۳ ہے ان کے ہندسی اور موسیقی اواسط کا فرق ۱۲۰ ہے اعداد معلوم کرو۔

۱۳۔ اگر کسی سلسلہ موسیقیہ کی پ دیں، ق دیں، روں رقمیں بالترتیب
ا، ب، ج ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(پ - ق) (ق - ا) + (ق - ر) (ر - پ) + (پ - ر) (ر - ا) = ۰$$

۱۴۔ اگر کسی سلسلہ حسابیہ کی (م + ۱) دیں، (ن + ۱) دیں اور (ر + ۱)
دیں رقمیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں اور م، ن، ر سلسلہ موسیقیہ میں ہوں
تو ثابت کرو کہ سلسلہ حسابیہ کے فرق مشترک اور رقم اول کی نسبت $\frac{۱}{۲}$ ہے۔

۱۵۔ اگر تین اعداد ل، م، ن سلسلہ ہندسیہ میں ہوں اور ایک
سلسلہ حسابیہ کی ل دیں، ن دیں، روں رقمیں سلسلہ موسیقیہ میں ہوں
تو ثابت کرو کہ اس سلسلہ حسابیہ کی رقم اول اور فرق مشترک کی
نسبت (م + ۱) : ۱ ہوگی۔

۱۶۔ اگر کسی دو مقدمہ اروں کے درمیان دو واسطہ حسابیہ ح، ح، ح
دو واسطہ ہندسیہ ہ، ہ، ہ اور دو واسطہ موسیقیہ م، م، م مندرج کی جائیں
تو ثابت کرو کہ $ہ : م = م : ح = ح : م = م + م + م$

۱۷۔ اگر دو اعداد کے ن واسطہ حسابیہ میں سے پہلا واسطہ پ
ہو اور ان ہی اعداد کے ن واسطہ موسیقیہ میں سے پہلا موسیقی واسطہ ق
ہو تو ثابت کرو کہ ق کی قیمت پ اور $(\frac{ن+۱}{ن-۱})$ پ کے درمیان واقع
نہیں ہو سکتی۔

اعداد طبیعیہ

۱۸۔ اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، کو طبعی اعداد کہتے ہیں یہ ایک
سلسلہ حسابیہ ہے جس کی ن ویں رقم ن ہے اور جس کی ن رقموں کا
حاصل جمع $\frac{ن(ن+۱)}{۲}$ ہے ہم آئندہ پہلے ن طبعی اعداد کی
پہلی، دوسری، تیسری، چوتھی، قوتوں کے مجموعوں کو بالترتیب

ص، ص، ص، ص..... سے تعبیر کریں گے یعنی

$$ص = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ن$$

$$ص = ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \dots + ن^۲$$

$$ص = ۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \dots + ن^۳ \text{ اور علیٰ ہذا القیاس}$$

اپنی آئندہ سہولت کے لیے ہم اس جگہ ایک اور طریق کتابت اختیار کرتے ہیں جو اعلیٰ ریاضی میں طالب علم کے اکثر کام آئے گا۔ ہم ذیل کے سلسلوں کو اس طرح تعبیر کریں گے۔

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + ن = چ$$

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \dots + ن^۲ = چ$$

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \dots + ن^۳ = چ$$

اور علیٰ ہذا القیاس

نوٹ۔ علامت چ اس سلسلہ کی پہلی ن رقموں کے حاصل جمع کو تعبیر کرتی ہے جس کی رویں رقم ر ہے۔ اسی طرح زیادہ عام طور پر علامت چ (ر) اس سلسلہ کی پہلی ن رقموں کے حاصل جمع کو تعبیر کرتی ہے جس کی رویں رقم ر (ر) ہے۔
۸۔ پہلے ن طبیعی اعداد کا حاصل جمع دریافت کرو۔

$$ص = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ن$$

$$(۱ + ۲) - ۱ = ۲ \text{ یا } ۱ + ۲ = ۳ \text{ ایک مساوات متبادہ ہے۔}$$

اب اگر لا کی جگہ قیمتیں ن، ن-۱، ن-۲، ن-۳.....

۱، ۲..... کے بعد دیگرے مساوات مندرجہ بالا میں رکھی جائیں تو ہمیں مساوات ذیل حاصل ہونگی۔

$$(1+n)^2 - n^2 = 1 + 2n$$

$$n^2 - (1-n)^2 = 1 + (1-n)2$$

.....

$$1 + 2 \times 2 = 2^2 - 1^2$$

$$1 + 1 \times 2 = 2^2 - 1^2$$

اگر سب مساواتوں کو جمع کیا جائے تو دائیں طرف کی رقوم سوائے دو کے ایک دوسرے کو نابود کر دیں گی۔

$$\therefore (1+n)^2 - 1^2 = 2 + 2n$$

$$\therefore 2 + 2n = (1+n)^2 - 1^2$$

$$2 + 2n = \frac{n(n+1)}{2}$$

نوٹ۔ ۱، ۲، ۳، ایک سلسلہ حسابیہ ہے جس کا مجموعہ

ن رقوم

$$= \frac{n}{2} = \{1 \times (1-n) + 2\}$$

۶۹۔ پہلے ن طبعی اعداد کے مربعوں کا حاصل جمع دریافت کرو۔
مساوات متشابه (۱+لا) - لا^۳ = لا^۳ + لا^۳ + لا^۳ + ۱ میں یکے بعد دیگرے لا = ن،
لا = ن-۱، لا = ۲، لا = ۱ رکھنے سے

$$(1+n)^3 - n^3 = 3 + 3n + n^2$$

$$n^3 - (1-n)^3 = 3 + (1-n)3 + (1-n)^2$$

.....

$$1 + 2 \times 3 + 2^2 \times 3 = 3^3 - 1^3$$

$$1 + 1 \times 3 + 1^2 \times 3 = 3^3 - 1^3$$

ان مساواتوں کو جمع کرنے سے

$$(1+n)^3 - 1^3 = 3 + 3n + n^2$$

چونکہ n کی قیمت ہم پہلے دریافت کر چکے ہیں، اس لیے

$$۳ = (۱+n) - \frac{۳}{۲}n - (۱+n) = (۱+n)$$

$$= \frac{(۱+n)}{۲} \{ ۲ - (۱+n) - ۳ \}$$

$$= \frac{(۱+n)}{۲} (۲+n)$$

$$\text{اس لیے } n = \frac{n(۱+n)(۱+n)}{۶}$$

۷۰۔ پہلے n طبیعی اعداد کے مکعبوں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

مساوات متشابهہ $(۱+۱) - ۱ = ۱$ ، $۳ - ۱ = ۲$ ، $۶ - ۱ = ۵$ ، $۹ - ۱ = ۸$ ، $۱۶ - ۱ = ۱۵$ ، $۲۵ - ۱ = ۲۴$ ، $۳۶ - ۱ = ۳۵$ ، $۴۹ - ۱ = ۴۸$ ، $۶۴ - ۱ = ۶۳$ ، $۸۱ - ۱ = ۸۰$ ، $۱۰۰ - ۱ = ۹۹$ ، $۱۲۱ - ۱ = ۱۲۰$ ، $۱۴۴ - ۱ = ۱۴۳$ ، $۱۶۹ - ۱ = ۱۶۸$ ، $۱۹۶ - ۱ = ۱۹۵$ ، $۲۲۵ - ۱ = ۲۲۴$ ، $۲۵۶ - ۱ = ۲۵۵$ ، $۲۸۹ - ۱ = ۲۸۸$ ، $۳۲۴ - ۱ = ۳۲۳$ ، $۳۶۱ - ۱ = ۳۶۰$ ، $۴۰۰ - ۱ = ۳۹۹$ ، $۴۴۱ - ۱ = ۴۴۰$ ، $۴۸۴ - ۱ = ۴۸۳$ ، $۵۲۹ - ۱ = ۵۲۸$ ، $۵۷۶ - ۱ = ۵۷۵$ ، $۶۲۵ - ۱ = ۶۲۴$ ، $۶۷۶ - ۱ = ۶۷۵$ ، $۷۲۹ - ۱ = ۷۲۸$ ، $۷۸۴ - ۱ = ۷۸۳$ ، $۸۴۱ - ۱ = ۸۴۰$ ، $۹۰۰ - ۱ = ۸۹۹$ ، $۹۶۱ - ۱ = ۹۶۰$ ، $۱۰۲۴ - ۱ = ۱۰۲۳$ ، $۱۰۸۹ - ۱ = ۱۰۸۸$ ، $۱۱۵۶ - ۱ = ۱۱۵۵$ ، $۱۲۲۵ - ۱ = ۱۲۲۴$ ، $۱۲۹۶ - ۱ = ۱۲۹۵$ ، $۱۳۶۹ - ۱ = ۱۳۶۸$ ، $۱۴۴۴ - ۱ = ۱۴۴۳$ ، $۱۵۲۱ - ۱ = ۱۵۲۰$ ، $۱۶۰۰ - ۱ = ۱۵۹۹$ ، $۱۶۸۱ - ۱ = ۱۶۸۰$ ، $۱۷۶۴ - ۱ = ۱۷۶۳$ ، $۱۸۴۹ - ۱ = ۱۸۴۸$ ، $۱۹۳۶ - ۱ = ۱۹۳۵$ ، $۲۰۲۵ - ۱ = ۲۰۲۴$ ، $۲۱۱۶ - ۱ = ۲۱۱۵$ ، $۲۲۰۹ - ۱ = ۲۲۰۸$ ، $۲۳۰۴ - ۱ = ۲۳۰۳$ ، $۲۴۰۱ - ۱ = ۲۴۰۰$ ، $۲۵۰۰ - ۱ = ۲۴۹۹$ ، $۲۶۰۱ - ۱ = ۲۶۰۰$ ، $۲۷۰۴ - ۱ = ۲۷۰۳$ ، $۲۸۰۹ - ۱ = ۲۸۰۸$ ، $۲۹۱۶ - ۱ = ۲۹۱۵$ ، $۳۰۲۵ - ۱ = ۳۰۲۴$ ، $۳۱۳۶ - ۱ = ۳۱۳۵$ ، $۳۲۴۹ - ۱ = ۳۲۴۸$ ، $۳۳۶۴ - ۱ = ۳۳۶۳$ ، $۳۴۸۱ - ۱ = ۳۴۸۰$ ، $۳۶۰۰ - ۱ = ۳۵۹۹$ ، $۳۷۲۱ - ۱ = ۳۷۲۰$ ، $۳۸۴۴ - ۱ = ۳۸۴۳$ ، $۳۹۶۹ - ۱ = ۳۹۶۸$ ، $۴۰۹۶ - ۱ = ۴۰۹۵$ ، $۴۲۲۵ - ۱ = ۴۲۲۴$ ، $۴۳۵۶ - ۱ = ۴۳۵۵$ ، $۴۴۸۹ - ۱ = ۴۴۸۸$ ، $۴۶۲۴ - ۱ = ۴۶۲۳$ ، $۴۷۶۱ - ۱ = ۴۷۶۰$ ، $۴۹۰۰ - ۱ = ۴۸۹۹$ ، $۵۰۴۱ - ۱ = ۵۰۴۰$ ، $۵۱۸۴ - ۱ = ۵۱۸۳$ ، $۵۳۲۹ - ۱ = ۵۳۲۸$ ، $۵۴۷۶ - ۱ = ۵۴۷۵$ ، $۵۶۲۵ - ۱ = ۵۶۲۴$ ، $۵۷۷۶ - ۱ = ۵۷۷۵$ ، $۵۹۲۹ - ۱ = ۵۹۲۸$ ، $۶۰۸۴ - ۱ = ۶۰۸۳$ ، $۶۲۴۱ - ۱ = ۶۲۴۰$ ، $۶۴۰۰ - ۱ = ۶۳۹۹$ ، $۶۵۶۱ - ۱ = ۶۵۶۰$ ، $۶۷۲۴ - ۱ = ۶۷۲۳$ ، $۶۸۸۹ - ۱ = ۶۸۸۸$ ، $۷۰۵۶ - ۱ = ۷۰۵۵$ ، $۷۲۲۵ - ۱ = ۷۲۲۴$ ، $۷۳۹۶ - ۱ = ۷۳۹۵$ ، $۷۵۶۹ - ۱ = ۷۵۶۸$ ، $۷۷۴۴ - ۱ = ۷۷۴۳$ ، $۷۹۲۱ - ۱ = ۷۹۲۰$ ، $۸۱۰۰ - ۱ = ۸۰۹۹$ ، $۸۲۸۱ - ۱ = ۸۲۸۰$ ، $۸۴۶۴ - ۱ = ۸۴۶۳$ ، $۸۶۴۹ - ۱ = ۸۶۴۸$ ، $۸۸۲۴ - ۱ = ۸۸۲۳$ ، $۹۰۰۱ - ۱ = ۹۰۰۰$ ، $۹۱۸۴ - ۱ = ۹۱۸۳$ ، $۹۳۶۹ - ۱ = ۹۳۶۸$ ، $۹۵۵۶ - ۱ = ۹۵۵۵$ ، $۹۷۴۹ - ۱ = ۹۷۴۸$ ، $۹۹۳۶ - ۱ = ۹۹۳۵$ ، $۱۰۱۲۵ - ۱ = ۱۰۱۲۴$ ، $۱۰۳۱۶ - ۱ = ۱۰۳۱۵$ ، $۱۰۵۰۹ - ۱ = ۱۰۵۰۸$ ، $۱۰۷۰۴ - ۱ = ۱۰۷۰۳$ ، $۱۰۹۰۱ - ۱ = ۱۰۹۰۰$ ، $۱۱۱۰۰ - ۱ = ۱۱۱۰۰$ ، $۱۱۳۰۱ - ۱ = ۱۱۳۰۰$ ، $۱۱۵۰۴ - ۱ = ۱۱۵۰۳$ ، $۱۱۷۰۹ - ۱ = ۱۱۷۰۸$ ، $۱۱۹۱۶ - ۱ = ۱۱۹۱۵$ ، $۱۲۱۲۵ - ۱ = ۱۲۱۲۴$ ، $۱۲۳۳۶ - ۱ = ۱۲۳۳۵$ ، $۱۲۵۴۹ - ۱ = ۱۲۵۴۸$ ، $۱۲۷۶۴ - ۱ = ۱۲۷۶۳$ ، $۱۲۹۸۱ - ۱ = ۱۲۹۸۰$ ، $۱۳۲۰۰ - ۱ = ۱۳۱۹۹$ ، $۱۳۴۲۱ - ۱ = ۱۳۴۲۰$ ، $۱۳۶۴۴ - ۱ = ۱۳۶۴۳$ ، $۱۳۸۶۹ - ۱ = ۱۳۸۶۸$ ، $۱۴۰۹۶ - ۱ = ۱۴۰۹۵$ ، $۱۴۳۲۵ - ۱ = ۱۴۳۲۴$ ، $۱۴۵۵۶ - ۱ = ۱۴۵۵۵$ ، $۱۴۷۸۹ - ۱ = ۱۴۷۸۸$ ، $۱۵۰۲۴ - ۱ = ۱۵۰۲۳$ ، $۱۵۲۵۱ - ۱ = ۱۵۲۵۰$ ، $۱۵۴۸۰ - ۱ = ۱۵۴۷۹$ ، $۱۵۷۱۱ - ۱ = ۱۵۷۱۰$ ، $۱۵۹۴۴ - ۱ = ۱۵۹۴۳$ ، $۱۶۱۷۹ - ۱ = ۱۶۱۷۸$ ، $۱۶۴۱۶ - ۱ = ۱۶۴۱۵$ ، $۱۶۶۵۶ - ۱ = ۱۶۶۵۵$ ، $۱۶۸۹۹ - ۱ = ۱۶۸۹۸$ ، $۱۷۱۴۴ - ۱ = ۱۷۱۴۳$ ، $۱۷۳۹۱ - ۱ = ۱۷۳۹۰$ ، $۱۷۶۴۰ - ۱ = ۱۷۶۳۹$ ، $۱۷۸۹۱ - ۱ = ۱۷۸۹۰$ ، $۱۸۱۴۴ - ۱ = ۱۸۱۴۳$ ، $۱۸۳۹۹ - ۱ = ۱۸۳۹۸$ ، $۱۸۶۵۶ - ۱ = ۱۸۶۵۵$ ، $۱۸۹۱۶ - ۱ = ۱۸۹۱۵$ ، $۱۹۱۷۹ - ۱ = ۱۹۱۷۸$ ، $۱۹۴۴۴ - ۱ = ۱۹۴۴۳$ ، $۱۹۷۱۱ - ۱ = ۱۹۷۱۰$ ، $۱۹۹۸۰ - ۱ = ۱۹۹۷۹$ ، $۲۰۲۵۱ - ۱ = ۲۰۲۵۰$ ، $۲۰۵۲۴ - ۱ = ۲۰۵۲۳$ ، $۲۰۷۹۹ - ۱ = ۲۰۷۹۸$ ، $۲۱۰۷۶ - ۱ = ۲۱۰۷۵$ ، $۲۱۳۵۶ - ۱ = ۲۱۳۵۵$ ، $۲۱۶۳۹ - ۱ = ۲۱۶۳۸$ ، $۲۱۹۱۶ - ۱ = ۲۱۹۱۵$ ، $۲۲۱۹۶ - ۱ = ۲۲۱۹۵$ ، $۲۲۴۷۹ - ۱ = ۲۲۴۷۸$ ، $۲۲۷۵۶ - ۱ = ۲۲۷۵۵$ ، $۲۳۰۳۶ - ۱ = ۲۳۰۳۵$ ، $۲۳۳۱۹ - ۱ = ۲۳۳۱۸$ ، $۲۳۵۹۶ - ۱ = ۲۳۵۹۵$ ، $۲۳۸۷۹ - ۱ = ۲۳۸۷۸$ ، $۲۴۱۵۶ - ۱ = ۲۴۱۵۵$ ، $۲۴۴۳۶ - ۱ = ۲۴۴۳۵$ ، $۲۴۷۱۱ - ۱ = ۲۴۷۱۰$ ، $۲۴۹۸۰ - ۱ = ۲۴۹۷۹$ ، $۲۵۲۵۱ - ۱ = ۲۵۲۵۰$ ، $۲۵۵۲۴ - ۱ = ۲۵۵۲۳$ ، $۲۵۷۹۹ - ۱ = ۲۵۷۹۸$ ، $۲۶۰۷۶ - ۱ = ۲۶۰۷۵$ ، $۲۶۳۵۶ - ۱ = ۲۶۳۵۵$ ، $۲۶۶۳۹ - ۱ = ۲۶۶۳۸$ ، $۲۶۹۱۶ - ۱ = ۲۶۹۱۵$ ، $۲۷۱۹۶ - ۱ = ۲۷۱۹۵$ ، $۲۷۴۷۹ - ۱ = ۲۷۴۷۸$ ، $۲۷۷۵۶ - ۱ = ۲۷۷۵۵$ ، $۲۸۰۳۶ - ۱ = ۲۸۰۳۵$ ، $۲۸۳۱۹ - ۱ = ۲۸۳۱۸$ ، $۲۸۵۹۶ - ۱ = ۲۸۵۹۵$ ، $۲۸۸۷۹ - ۱ = ۲۸۸۷۸$ ، $۲۹۱۵۶ - ۱ = ۲۹۱۵۵$ ، $۲۹۴۳۶ - ۱ = ۲۹۴۳۵$ ، $۲۹۷۱۱ - ۱ = ۲۹۷۱۰$ ، $۲۹۹۸۰ - ۱ = ۲۹۹۷۹$ ، $۳۰۲۵۱ - ۱ = ۳۰۲۵۰$ ، $۳۰۵۲۴ - ۱ = ۳۰۵۲۳$ ، $۳۰۷۹۹ - ۱ = ۳۰۷۹۸$ ، $۳۱۰۷۶ - ۱ = ۳۱۰۷۵$ ، $۳۱۳۵۶ - ۱ = ۳۱۳۵۵$ ، $۳۱۶۳۹ - ۱ = ۳۱۶۳۸$ ، $۳۱۹۱۶ - ۱ = ۳۱۹۱۵$ ، $۳۲۱۹۶ - ۱ = ۳۲۱۹۵$ ، $۳۲۴۷۹ - ۱ = ۳۲۴۷۸$ ، $۳۲۷۵۶ - ۱ = ۳۲۷۵۵$ ، $۳۳۰۳۶ - ۱ = ۳۳۰۳۵$ ، $۳۳۳۱۹ - ۱ = ۳۳۳۱۸$ ، $۳۳۵۹۶ - ۱ = ۳۳۵۹۵$ ، $۳۳۸۷۹ - ۱ = ۳۳۸۷۸$ ، $۳۴۱۵۶ - ۱ = ۳۴۱۵۵$ ، $۳۴۴۳۶ - ۱ = ۳۴۴۳۵$ ، $۳۴۷۱۱ - ۱ = ۳۴۷۱۰$ ، $۳۴۹۸۰ - ۱ = ۳۴۹۷۹$ ، $۳۵۲۵۱ - ۱ = ۳۵۲۵۰$ ، $۳۵۵۲۴ - ۱ = ۳۵۵۲۳$ ، $۳۵۷۹۹ - ۱ = ۳۵۷۹۸$ ، $۳۶۰۷۶ - ۱ = ۳۶۰۷۵$ ، $۳۶۳۵۶ - ۱ = ۳۶۳۵۵$ ، $۳۶۶۳۹ - ۱ = ۳۶۶۳۸$ ، $۳۶۹۱۶ - ۱ = ۳۶۹۱۵$ ، $۳۷۱۹۶ - ۱ = ۳۷۱۹۵$ ، $۳۷۴۷۹ - ۱ = ۳۷۴۷۸$ ، $۳۷۷۵۶ - ۱ = ۳۷۷۵۵$ ، $۳۸۰۳۶ - ۱ = ۳۸۰۳۵$ ، $۳۸۳۱۹ - ۱ = ۳۸۳۱۸$ ، $۳۸۵۹۶ - ۱ = ۳۸۵۹۵$ ، $۳۸۸۷۹ - ۱ = ۳۸۸۷۸$ ، $۳۹۱۵۶ - ۱ = ۳۹۱۵۵$ ، $۳۹۴۳۶ - ۱ = ۳۹۴۳۵$ ، $۳۹۷۱۱ - ۱ = ۳۹۷۱۰$ ، $۳۹۹۸۰ - ۱ = ۳۹۹۷۹$ ، $۴۰۲۵۱ - ۱ = ۴۰۲۵۰$ ، $۴۰۵۲۴ - ۱ = ۴۰۵۲۳$ ، $۴۰۷۹۹ - ۱ = ۴۰۷۹۸$ ، $۴۱۰۷۶ - ۱ = ۴۱۰۷۵$ ، $۴۱۳۵۶ - ۱ = ۴۱۳۵۵$ ، $۴۱۶۳۹ - ۱ = ۴۱۶۳۸$ ، $۴۱۹۱۶ - ۱ = ۴۱۹۱۵$ ، $۴۲۱۹۶ - ۱ = ۴۲۱۹۵$ ، $۴۲۴۷۹ - ۱ = ۴۲۴۷۸$ ، $۴۲۷۵۶ - ۱ = ۴۲۷۵۵$ ، $۴۳۰۳۶ - ۱ = ۴۳۰۳۵$ ، $۴۳۳۱۹ - ۱ = ۴۳۳۱۸$ ، $۴۳۵۹۶ - ۱ = ۴۳۵۹۵$ ، $۴۳۸۷۹ - ۱ = ۴۳۸۷۸$ ، $۴۴۱۵۶ - ۱ = ۴۴۱۵۵$ ، $۴۴۴۳۶ - ۱ = ۴۴۴۳۵$ ، $۴۴۷۱۱ - ۱ = ۴۴۷۱۰$ ، $۴۴۹۸۰ - ۱ = ۴۴۹۷۹$ ، $۴۵۲۵۱ - ۱ = ۴۵۲۵۰$ ، $۴۵۵۲۴ - ۱ = ۴۵۵۲۳$ ، $۴۵۷۹۹ - ۱ = ۴۵۷۹۸$ ، $۴۶۰۷۶ - ۱ = ۴۶۰۷۵$ ، $۴۶۳۵۶ - ۱ = ۴۶۳۵۵$ ، $۴۶۶۳۹ - ۱ = ۴۶۶۳۸$ ، $۴۶۹۱۶ - ۱ = ۴۶۹۱۵$ ، $۴۷۱۹۶ - ۱ = ۴۷۱۹۵$ ، $۴۷۴۷۹ - ۱ = ۴۷۴۷۸$ ، $۴۷۷۵۶ - ۱ = ۴۷۷۵۵$ ، $۴۸۰۳۶ - ۱ = ۴۸۰۳۵$ ، $۴۸۳۱۹ - ۱ = ۴۸۳۱۸$ ، $۴۸۵۹۶ - ۱ = ۴۸۵۹۵$ ، $۴۸۸۷۹ - ۱ = ۴۸۸۷۸$ ، $۴۹۱۵۶ - ۱ = ۴۹۱۵۵$ ، $۴۹۴۳۶ - ۱ = ۴۹۴۳۵$ ، $۴۹۷۱۱ - ۱ = ۴۹۷۱۰$ ، $۴۹۹۸۰ - ۱ = ۴۹۹۷۹$ ، $۵۰۲۵۱ - ۱ = ۵۰۲۵۰$ ، $۵۰۵۲۴ - ۱ = ۵۰۵۲۳$ ، $۵۰۷۹۹ - ۱ = ۵۰۷۹۸$ ، $۵۱۰۷۶ - ۱ = ۵۱۰۷۵$ ، $۵۱۳۵۶ - ۱ = ۵۱۳۵۵$ ، $۵۱۶۳۹ - ۱ = ۵۱۶۳۸$ ، $۵۱۹۱۶ - ۱ = ۵۱۹۱۵$ ، $۵۲۱۹۶ - ۱ = ۵۲۱۹۵$ ، $۵۲۴۷۹ - ۱ = ۵۲۴۷۸$ ، $۵۲۷۵۶ - ۱ = ۵۲۷۵۵$ ، $۵۳۰۳۶ - ۱ = ۵۳۰۳۵$ ، $۵۳۳۱۹ - ۱ = ۵۳۳۱۸$ ، $۵۳۵۹۶ - ۱ = ۵۳۵۹۵$ ، $۵۳۸۷۹ - ۱ = ۵۳۸۷۸$ ، $۵۴۱۵۶ - ۱ = ۵۴۱۵۵$ ، $۵۴۴۳۶ - ۱ = ۵۴۴۳۵$ ، $۵۴۷۱۱ - ۱ = ۵۴۷۱۰$ ، $۵۴۹۸۰ - ۱ = ۵۴۹۷۹$ ، $۵۵۲۵۱ - ۱ = ۵۵۲۵۰$ ، $۵۵۵۲۴ - ۱ = ۵۵۵۲۳$ ، $۵۵۷۹۹ - ۱ = ۵۵۷۹۸$ ، $۵۶۰۷۶ - ۱ = ۵۶۰۷۵$ ، $۵۶۳۵۶ - ۱ = ۵۶۳۵۵$ ، $۵۶۶۳۹ - ۱ = ۵۶۶۳۸$ ، $۵۶۹۱۶ - ۱ = ۵۶۹۱۵$ ، $۵۷۱۹۶ - ۱ = ۵۷۱۹۵$ ، $۵۷۴۷۹ - ۱ = ۵۷۴۷۸$ ، $۵۷۷۵۶ - ۱ = ۵۷۷۵۵$ ، $۵۸۰۳۶ - ۱ = ۵۸۰۳۵$ ، $۵۸۳۱۹ - ۱ = ۵۸۳۱۸$ ، $۵۸۵۹۶ - ۱ = ۵۸۵۹۵$ ، $۵۸۸۷۹ - ۱ = ۵۸۸۷۸$ ، $۵۹۱۵۶ - ۱ = ۵۹۱۵۵$ ، $۵۹۴۳۶ - ۱ = ۵۹۴۳۵$ ، $۵۹۷۱۱ - ۱ = ۵۹۷۱۰$ ، $۵۹۹۸۰ - ۱ = ۵۹۹۷۹$ ، $۶۰۲۵۱ - ۱ = ۶۰۲۵۰$ ، $۶۰۵۲۴ - ۱ = ۶۰۵۲۳$ ، $۶۰۷۹۹ - ۱ = ۶۰۷۹۸$ ، $۶۱۰۷۶ - ۱ = ۶۱۰۷۵$ ، $۶۱۳۵۶ - ۱ = ۶۱۳۵۵$ ، $۶۱۶۳۹ - ۱ = ۶۱۶۳۸$ ، $۶۱۹۱۶ - ۱ = ۶۱۹۱۵$ ، $۶۲۱۹۶ - ۱ = ۶۲۱۹۵$ ، $۶۲۴۷۹ - ۱ = ۶۲۴۷۸$ ، $۶۲۷۵۶ - ۱ = ۶۲۷۵۵$ ، $۶۳۰۳۶ - ۱ = ۶۳۰۳۵$ ، $۶۳۳۱۹ - ۱ = ۶۳۳۱۸$ ، $۶۳۵۹۶ - ۱ = ۶۳۵۹۵$ ، $۶۳۸۷۹ - ۱ = ۶۳۸۷۸$ ، $۶۴۱۵۶ - ۱ = ۶۴۱۵۵$ ، $۶۴۴۳۶ - ۱ = ۶۴۴۳۵$ ، $۶۴۷۱۱ - ۱ = ۶۴۷۱۰$ ، $۶۴۹۸۰ - ۱ = ۶۴۹۷۹$ ، $۶۵۲۵۱ - ۱ = ۶۵۲۵۰$ ، $۶۵۵۲۴ - ۱ = ۶۵۵۲۳$ ، $۶۵۷۹۹ - ۱ = ۶۵۷۹۸$ ، $۶۶۰۷۶ - ۱ = ۶۶۰۷۵$ ، $۶۶۳۵۶ - ۱ = ۶۶۳۵۵$ ، $۶۶۶۳۹ - ۱ = ۶۶۶۳۸$ ، $۶۶۹۱۶ - ۱ = ۶۶۹۱۵$ ، $۶۷۱۹۶ - ۱ = ۶۷۱۹۵$ ، $۶۷۴۷۹ - ۱ = ۶۷۴۷۸$ ، $۶۷۷۵۶ - ۱ = ۶۷۷۵۵$ ، $۶۸۰۳۶ - ۱ = ۶۸۰۳۵$ ، $۶۸۳۱۹ - ۱ = ۶۸۳۱۸$ ، $۶۸۵۹۶ - ۱ = ۶۸۵۹۵$ ، $۶۸۸۷۹ - ۱ = ۶۸۸۷۸$ ، $۶۹۱۵۶ - ۱ = ۶۹۱۵۵$ ، $۶۹۴۳۶ - ۱ = ۶۹۴۳۵$ ، $۶۹۷۱۱ - ۱ = ۶۹۷۱۰$ ، $۶۹۹۸۰ - ۱ = ۶۹۹۷۹$ ، $۷۰۲۵۱ - ۱ = ۷۰۲۵۰$ ، $۷۰۵۲۴ - ۱ = ۷۰۵۲۳$ ، $۷۰۷۹۹ - ۱ = ۷۰۷۹۸$ ، $۷۱۰۷۶ - ۱ = ۷۱۰۷۵$ ، $۷۱۳۵۶ - ۱ = ۷۱۳۵۵$ ، $۷۱۶۳۹ - ۱ = ۷۱۶۳۸$ ، $۷۱۹۱۶ - ۱ = ۷۱۹۱۵$ ، $۷۲۱۹۶ - ۱ = ۷۲۱۹۵$ ، $۷۲۴۷۹ - ۱ = ۷۲۴۷۸$ ، $۷۲۷۵۶ - ۱ = ۷۲۷۵۵$ ، $۷۳۰۳۶ - ۱ = ۷۳۰۳۵$ ، $۷۳۳۱۹ - ۱ = ۷۳۳۱۸$ ، $۷۳۵۹۶ - ۱ = ۷۳۵۹۵$ ، $۷۳۸۷۹ - ۱ = ۷۳۸۷۸$ ، $۷۴۱۵۶ - ۱ = ۷۴۱۵۵$ ، $۷۴۴۳۶ - ۱ = ۷۴۴۳۵$ ، $۷۴۷۱۱ - ۱ = ۷۴۷۱۰$ ، $۷۴۹۸۰ - ۱ = ۷۴۹۷۹$ ، $۷۵۲۵۱ - ۱ = ۷۵۲۵۰$ ، $۷۵۵۲۴ - ۱ = ۷۵۵۲۳$ ، $۷۵۷۹۹ - ۱ = ۷۵۷۹۸$ ، $۷۶۰۷۶ - ۱ = ۷۶۰۷۵$ ، $۷۶۳۵۶ - ۱ = ۷۶۳۵۵$ ، $۷۶۶۳۹ - ۱ = ۷۶۶۳۸$ ، $۷۶۹۱۶ - ۱ = ۷۶۹۱۵$ ، $۷۷۱۹۶ - ۱ = ۷۷۱۹۵$ ، $۷۷۴۷۹ - ۱ = ۷۷۴۷۸$ ، $۷۷۷۵۶ - ۱ = ۷۷۷۵۵$ ، $۷۸۰۳۶ - ۱ = ۷۸۰۳۵$ ، $۷۸۳۱۹ - ۱ = ۷۸۳۱۸$ ، $۷۸۵۹۶ - ۱ = ۷۸۵۹۵$ ، $۷۸۸۷۹ - ۱ = ۷۸۸۷۸$ ، $۷۹۱۵۶ - ۱ = ۷۹۱۵۵$ ، $۷۹۴۳۶ - ۱ = ۷۹۴۳۵$ ، $۷۹۷۱۱ - ۱ = ۷۹۷۱۰$ ، $۷۹۹۸۰ - ۱ = ۷۹۹۷۹$ ، $۸۰۲۵۱ - ۱ = ۸۰۲۵۰$ ، $۸۰۵۲۴ - ۱ = ۸۰۵۲۳$ ، $۸۰۷۹۹ - ۱ = ۸۰۷۹۸$ ، $۸۱۰۷۶ - ۱ = ۸۱۰۷۵$ ، $۸۱۳۵۶ - ۱ = ۸۱۳۵۵$ ، $۸۱۶۳۹ - ۱ = ۸۱۶۳۸$ ، $۸۱۹۱۶ - ۱ = ۸۱۹۱۵$ ، $۸۲۱۹۶ - ۱ = ۸۲۱۹۵$ ، $۸۲۴۷۹ - ۱ = ۸۲۴۷۸$ ، $۸۲۷۵۶ - ۱ = ۸۲۷۵۵$ ، $۸۳۰۳۶ - ۱ = ۸۳۰۳۵$ ، $۸۳۳۱۹ - ۱ = ۸۳۳۱۸$ ، $۸۳۵۹۶ - ۱ = ۸۳۵۹۵$ ، $۸۳۸۷۹ - ۱ = ۸۳۸۷۸$ ، $۸۴۱۵۶ - ۱ = ۸۴۱۵۵$ ، $۸۴۴۳۶ - ۱ = ۸$

$$\therefore \text{ص} = \frac{n^2(n+1)}{2} = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}$$

نتیجہ صریح۔ پہلے n طبعی اعداد کی تیسری قوتوں کا حاصل جمع ان کے حاصل جمع کے مربع کے برابر ہوتا ہے۔

نوٹ:- دفعات ۶ تا ۷ کے ضابطوں کی مدد سے سلسلہ

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

کی رقموں کے مربوں کا مجموعہ اور مکعبوں کا مجموعہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

مثال (۱) ایک سلسلہ کی n دیں رقم $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots - n^3$ ہے

اس سلسلہ کی n رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

فرض کرو کہ حاصل جمع v ہے۔

$$v = 1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots$$

$$+ 2^3 - 3^3 + 4^3 - 5^3 + \dots$$

$$+ 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \dots$$

$$+ 4^3 - 5^3 + 6^3 - 7^3 + \dots$$

جمع کرنے سے $v = 1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + 2^3 - 3^3 + 4^3 - 5^3 + \dots$

$$= \frac{1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + n^3 - (n+1)^3}{1-2} = \frac{n^3(n+1)(1+n)}{2} - \frac{(n+1)^3(n+2)(1+n+1)}{2}$$

$$= \frac{1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + n^3 - (n+1)^3}{1-2} = \frac{n^3(n+1)(1+n)}{2} - \frac{(n+1)^3(n+2)(1+n+1)}{2}$$

$$= \frac{1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + n^3 - (n+1)^3}{1-2} = \frac{n^3(n+1)(1+n)}{2} - \frac{(n+1)^3(n+2)(1+n+1)}{2}$$

مثال (۲) سلسلہ $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n \times (n+1)$ کون رقموں کا جمع کرو

اس سلسلہ کی n دیں رقم $r = r(r+1) = r^2 + r$

اس لیے n رقموں کا مجموعہ $= 1^2 + 1 + 2^2 + 2 + \dots + n^2 + n$

$$= \frac{n(n+1)(1+n)}{2} + \frac{n(n+1)(1+n)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = \{2+1+n\}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = (2+n)$$

$$\frac{n(n+1)}{2} =$$

مثال (۳) ثابت کرو کہ متصل صحیح اعداد کے مکعبوں کی کسی تعداد کا مجموعہ اُن اعداد کے مجموعہ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے اس میں ضروری نہیں کہ اعداد ایک سے شروع ہوں۔

فرض کرو کہ پ + ۱، پ + ۲، پ + ۳،، پ + ن
متصل صحیح اعداد ہیں۔ ہیں ثابت کرنا ہے کہ

$$(1+p)^3 + (2+p)^3 + (3+p)^3 + \dots + (n+p)^3$$

جملہ (پ + ۱) + (پ + ۲) + (پ + ۳) + + (پ + ن) پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ص اور صں بالترتیب مندرجہ بالا دو سلسلوں کے مجموعوں کو تعبیر کرتے ہیں تب

$$ص = \{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n+p)^3\}$$

$$- \{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + p^3\}$$

$$= \frac{(n+p)(n+p+1)}{2} - \frac{p(p+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+p)(n+p+1)}{2} + \frac{p(p+1)}{2}$$

$$\times \left\{ \frac{(n+p)(n+p+1)}{2} - \frac{p(p+1)}{2} \right\}$$

مثال (۴) سلسلہ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots$ کا حاصل جمع n رقموں تک دریافت کرو۔

$$u + \frac{(1+u)u}{r} + \frac{(1+u^2)(1+u)u}{4} + \dots$$

$$n + \left\{ 1 - \frac{(1+n^2)}{3} \right\} (1+n)n^2 =$$

$$(1 - \frac{1}{n}) \frac{n}{r} = \{r + (1 - \frac{1}{n})r\} \frac{n}{r} =$$

دیے ہوئے سلسلہ کی r ویں رقم $= (r+1) \times r = r + r^2$
اس لیے دیے ہوئے سلسلہ کی n رقموں کا مجموعہ

$$2^{\text{و}} \text{ج}_1 + 5^{\text{و}} \text{ج}_1 =$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n^2(n+1)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \left\{ \frac{n^2+1}{3} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} =$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n^3+n^2+n+2}{6} =$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} =$$

۱۲

۷۷۔ ب۔ سلسلوں کے جمع کرنے کی چند خاص صورتیں۔

امثلہ ذیل چند کارآمد طریقوں کی توضیح کے لیے منتخب کی گئی ہیں ان کی استقامت سے خاص خاص قسم کے سلسلوں کا مجموعہ آسانی معلوم ہو سکتا ہے ذیل کے سلسلے درجات گزشتہ کے سلسلوں سے کئی لحاظ سے مختلف ہیں۔ ان میں بالعموم ان ویں رقم کا دریافت کرنا مشکل ہوگا اس لیے طالب علم کو چاہیے کہ طرز عمل کے اس حصہ کو خاص توجہ سے پڑھے۔

مثال۔ سلسلہ ۱+۵+۱۲+۲۲+۳۵+..... کو ان رقموں تک جمع کرو۔ [خصوصیت اس سلسلے کی یہ ہے کہ متصل رقموں کے متواتر فترت سلسلہ حسابیہ میں ہیں]

فرض کرو کہ ص = حاصل جمع مطلوب اور ق_۱ = ان ویں رقم

تب ص = ۱+۵+۱۲+۲۲+.....+ق_۱

تیز ص = ۰+۱+۵+۱۲+.....+ق_۱-۱

اس لیے تفریق سے

$$۱+۴+۳+۱۰+.....+(ق_۱-ق_۱-۱)-ق_۱=۰$$

$$= \{ ۱+۴+۳+۱۰+.....+ن ارقام تک \} - ق_۱$$

$$\frac{n}{۲} \{ ۳(۱-ن) + ۲ \} = \frac{n(۳-ن)}{۲}$$

یعنی سلسلہ معلومہ کی n ویں رقم $= \frac{3}{2} \times n - \frac{1}{2} \times n$

اس لیے $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} (1 + 2 + 3 + \dots + n)$

$-\frac{1}{2} (1 + 2 + 3 + \dots + n)$

$$\frac{3}{2} \times n - \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{2}$$

۴۰ ج۔ مندرجہ ذیل کا احتیاط سے مطالعہ کرنا چاہیے اس قسم کی تفتیب و ترتیب سے ہم کئی قسم کے سلسلے جمع کر سکتے ہیں جن کی رقوم کسری ہوں اور جن کے نسبت نما کسی خاص قانون کے مطابق مرتب کیے گئے ہوں۔

$$\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \text{ اور } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

ہر ایک صورت میں ہر ایک رقم کو دو جملوں کے فرق کے طور پر بیان کیا گیا ہے۔

مثال (۱) سلسلہ $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots$ کون کون سے جملوں کے مجموعہ کے

فرض کرو کہ $ص =$ حاصل جمع n ارقام اور $ق = n$ دیں قسم

$$اب \quad ق = \frac{1}{2 \times 1} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$قسم = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$قسم = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$ق = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$اس لیے \quad ص = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

مثال (۲) سلسلہ $\frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{4 \times 3} + \dots$ کو n ارقام تک جمع کرو۔

ظاہر ہے کہ

$$ق = \frac{1}{(2-n)(1+n)} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2-n} - \frac{1}{1+n} \right\}$$

$$اب قسم = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \right)$$

$$قسم = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

$$قسم = \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

$$ق = \frac{1}{(2-n)(1+n)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2-n} - \frac{1}{1+n} \right)$$

$$اس لیے ص = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{1+n} \right) = \frac{n}{1+n}$$

$$\dots + \frac{1}{13 \times 10 \times 4} + \frac{1}{10 \times 4 \times 3} + \frac{1}{4 \times 3 \times 1}$$

کا مجموعہ ن رقموں تک دریافت کرو۔

$$\text{یہاں } ق_1 = \frac{1}{(2+n)(1+n)(2-n)}$$

$$\left\{ \frac{1}{(2+n)(1+n)} - \frac{1}{(1+n)(2-n)} \right\} \frac{1}{4} =$$

$$\text{اب } ق_2 = \frac{1}{4 \times 3 \times 1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4 \times 3} - \frac{1}{3 \times 1} \right)$$

$$ق_3 = \frac{1}{10 \times 4 \times 3} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{10 \times 4} - \frac{1}{4 \times 3} \right)$$

$$ق_4 = \frac{1}{13 \times 10 \times 4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{13 \times 10} - \frac{1}{10 \times 4} \right)$$

$$ق_5 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(2+n)(1+n)} - \frac{1}{(1+n)(2-n)} \right\}$$

$$\text{اس لیے } م = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(2+n)(1+n)} - \frac{1}{2 \times 1} \right\}$$

$$= \frac{n+5}{(2+n)(1+n) \times 4}$$

$$= \frac{n(5+n)}{(2+n)(1+n) \times 8}$$

گولپوں کے انبار

۱۔ ایک مکمل مینار (مخروط مضاعف) کی شکل میں جو مربع قاعدہ پر قائم

ہے چند گولیاں ترتیب دی گئی ہیں ان کی تعداد دریافت کرو۔

فرض کرو کہ قاعدہ کے

ہر ایک ضلع میں n گولیاں ہیں

سب سے پچھلی تہ میں گولیوں کی

تعداد n ہوگی۔ اس سے اوپر کی

تہ میں $(n-1)$ اور اس

سے اوپر کی تہ میں $(n-2)$ اور

علیٰ ہذا القیاس یہاں تک کہ چوٹی پر صرف ایک گولی ہوگی

اس لیے تعداد مطلوبہ جس $= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{[دفعہ ۶۹]}$$

۲۔ ایک ایسے مکمل مینار کی شکل میں جس کا قاعدہ مثلث متساوی الاضلاع

ہے چند گولیاں ترتیب دی گئی ہیں ان کی تعداد دریافت کرو۔

فرض کرو کہ قاعدہ کے ہر ایک

ضلع میں n گولیاں ہیں سب سے

پچھلی تہ میں گولیوں کی تعداد

$$= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{n(n+1)}{2}$$

اگر ہم اس نتیجے میں n کی بجائے $n-1$ ، $n-2$ ، $n-3$ وغیرہ رکھیں

تو ہمیں بالترتیب دوسری، تیسری، چوتھی تہ میں گولیوں کی تعداد معلوم ہو جائے گی۔

اس لیے n تہوں والے مکمل مثلثی مینار میں گولیوں کی تعداد

$$= \frac{1}{6} \{ n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 \} - \frac{1}{6} \{ 1 + 2 + \dots + (n-1) + n \}$$



$$\frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \times \frac{1}{6} =$$

$$\frac{n(n+1)}{12} \{ 3 + (n+2) \} =$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} =$$

۳۔ گولیوں کا ایک مکمل انبار ستیلی قاعدے پر کھڑا ہے، اس میں کل گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

فرض کرو کہ قاعدے کے بڑے اور چھوٹے ضلع میں بالترتیب م اور ن گولیاں ہیں۔

سب سے اوپر کی تہ میں گولیوں کی صرف ایک قطار ہے جس میں م۔ (ن۔۱) یعنی (م۔ن۔۱) گولیاں ہیں۔

اس سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد = ۲(م۔ن۔۱) + ۲
اس سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد = ۳(م۔ن۔۱) + ۳ اور
علیٰ ہذا القیاس سب سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد = ن(م۔ن۔۱) + ن



اس لیے ص = (م۔ن۔۱) + (م۔ن۔۱) + ۲ + (م۔ن۔۱) + ۳ + (م۔ن۔۱) + ۴ + ... +

$$= (م۔ن)(۱+۲+۳+...+ن) + (۱+۲+۳+...+ن)$$

$$\frac{(۲-ن)ن(ن+۱)}{۲} + \frac{ن(ن+۱)(۲+ن)}{۶} =$$

$$\frac{ن(ن+۱)}{۶} = \{۳(ن-۱) + ۲ن + ۱\} \frac{ن(ن+۱)(۲+ن)}{۶} =$$

۴۔ گولیوں کا ایک نامکمل انبار ایک مستطیلی قاعدہ پر کھڑا ہے اس میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

فرض کرو کہ سب سے اوپر کی تہ کے دونوں اضلاع میں گولیوں کی تعداد بالترتیب ۱ اور ۲ ہے اور انبار میں کل تہوں کی تعداد ۲ ہے تو سب سے اوپر کی تہ میں گولیوں کی تعداد = ۱ + ۲

اس سے پتہ چلتی ہے کہ تہوں کی تعداد = (۱+۲) (۱+۳)

اس سے پتہ چلتی ہے کہ تہوں کی تعداد = (۲+۳) (۲+۴)

اسی طرح اوپر سے ۲ ویں تہ میں گولیوں کی تعداد

$$= \{۱ + (۲-۱)\} \{۲ + (۲-۱)\} =$$

$$= ۱ + ۲ + (۲-۱) + (۲-۱)^۲$$

اس لیے نامکمل مستطیلی انبار میں گولیوں کی تعداد

$$= ۱ + ۲ + (۲-۱) + (۲-۱)^۲ + (۲-۱)^۳ + \dots + (۲-۱)^{ن-۱}$$

$$= ۱ + ۲ + (۲-۱) + (۲-۱)^۲ + (۲-۱)^۳ + \dots + (۲-۱)^{ن-۱}$$

$$= \frac{ن}{۶} \{۱ + ۲ + (۲-۱) + (۲-۱)^۲ + (۲-۱)^۳ + \dots + (۲-۱)^{ن-۱}\}$$

۵۔ عددی مثالوں میں ذیل کی ترکیب کا استعمال زیادہ آسان ہو گا۔

مثال۔ گولیوں کا ایک نامکمل انبار مربع قاعدہ پر کھڑا ہے اس میں ۶ تہیں ہیں سب سے اوپر کی تہ کے ہر ایک ضلع میں ۲ گولیاں ہیں، انبار میں کل گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

اگر ہم اس انبار پر ایک اور مربع انبار جس کے قاعدے کے ہر ایک

ضلع میں ۱۱ گولیاں ہوں رکھ دیں تو ہمیں ۲۴ تہوں کا ایک مکمل مربع انبار حاصل ہوگا۔

$$۶۹۳۰ = \frac{۵۵ \times ۲۸ \times ۲۴}{۶} =$$

اس مکمل انبار میں گولیوں کی تعداد =
 اُن گولیوں کی تعداد جو ناقص دھیر کے اوپر رکھی گئی ہیں۔

$$۵۰۶ = \frac{۲۳ \times ۱۲ \times ۱۱}{۶} =$$

اس لیے ناقص انبار میں گولیوں کی تعداد = ۶۳۲۳

امثلہ نمبری ۶ ب

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو۔

- ۱- $۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۲۵$
- ۲- $۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۲۵$ کو ۲۵ رقموں تک
- ۳- $۱ \times ۱ + ۲ \times ۲ + ۳ \times ۳ + \dots + ۲۵ \times ۲۵$ کو ۲۵ رقموں تک
- ۴- $۱ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۴ + \dots + ۲۴ \times ۲۵$ کو ۲۵ رقموں تک
- ۵- $۱ \times ۳ + ۲ \times ۴ + ۳ \times ۵ + \dots + ۲۳ \times ۲۵$ کو ۲۵ رقموں تک
- ۶- $۱ \times ۲ \times ۳ + ۲ \times ۳ \times ۴ + ۳ \times ۴ \times ۵ + \dots + ۲۳ \times ۲۴ \times ۲۵$ کو ۲۵ رقموں تک
- ۷- $۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۲۵$ کو ۲۵ رقموں تک
- ۸- $۱ + (۱+۲) + (۱+۲+۳) + \dots + (۱+۲+۳+\dots+۲۵)$ کو ۲۵ رقموں تک
- ۹- n ویں رقم $n^۲$ - n ہے
- ۱۰- n ویں رقم $n^۲ + \frac{n}{۲}$ ہے
- ۱۱- n ویں رقم $n(n+۲)$ ہے
- ۱۲- n ویں رقم $n(۲+n+۳)$ ہے
- ۱۳- n ویں رقم $\frac{n^۳}{۳} - \frac{n}{۳}$ ہے
- ۱۴- n ویں رقم $\frac{n^۳}{۳} + \frac{n}{۳} - (۲+n)$ ہے۔

..... + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 16

۱۹ - ۱ + ۸ + ۲۱ + ۴۰ + ۶۵ + کون " "

۲۱ - ۱ + ۱۰ + ۲۶ + ۵۲ + ۸۵ + کو ن " "

۲۳ = ۲ + ۳ + ۶ + ۱۱ + ۱۸ + کو ن " "

" " ن کو + $\frac{1}{9 \times 6}$ + $\frac{1}{6 \times 5}$ + $\frac{1}{5 \times 4}$ + 5

" " 29 $\sqrt{\dots + \frac{1}{4 \times 2} + \frac{1}{8 \times 2} + \frac{1}{12 \times 2} + \frac{1}{16 \times 1} - 24}$

$$26 - \frac{1}{4 \times 3} + \frac{1}{11 \times 6} + \frac{1}{15 \times 11} + \dots \text{کو ن ارقام تک}$$

۲۸ - $\frac{1}{5 \times 7 \times 9} + \frac{1}{6 \times 8 \times 10} + \dots$ کو ن " "

گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۹۔ ایک مربع انبار میں جس کے قاعدہ کے ہر ایک ضلع میں ۵ اگولیاں ہیں۔

۳۔ ایک مثلثی انبار میں جس کے قاعدہ کے ہر ایک ضلع میں ۸ گولیاں ہیں

۳۔ ایک مستطیلی انبار میں جس کے قاعدہ کے طول اور عرض میں بالترتیب

۵۰ اور ۲۵ گولیاں ہیں۔

۳۲۔ ایک ایسے نامکمل مثلثی اتبار میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔ جس کے

قاعدہ کے ایک ضلع میں ۲۵ گولیاں ہیں اور سب سے اوپر کی تہ کے ایک ضلع میں ۴ گولیاں ہیں۔

۳۳۔ ایک نامکمل مربع انبار میں ۲ تہیں ہیں اور قاعدہ کے ہر ایک ضلع میں ۲۰ گولیاں ہیں۔ گولیوں کی کل تعداد دریافت کرو۔

۳۴۔ ایک مکمل مستطیلی انبار میں گولیوں کی تعداد ۲۲۳۹۵ ہے اگر قاعدہ کے عرض میں ۳۴ گولیاں ہوں تو طول میں کتنی گولیاں ہونگی؟

۳۵۔ کسی مربع انبار کی سب سے اونچی تہ میں گولیوں کی تعداد ۱۶۹ ہے اور سب سے نچلی تہ میں ۰.۸۹ تو معلوم کرو کہ کل انبار میں کتنی گولیاں ہیں۔

۳۶۔ ایک مکمل مستطیلی انبار میں گولیوں کی ۱۵ تہیں ہیں اور قاعدہ کے بڑے ضلع میں ۲۰ گولیاں ہیں تو معلوم کرو کہ انبار میں کل گولیاں کتنی ہیں؟

۳۷۔ ایک نامکمل مستطیلی انبار کی سب سے اونچی تہ کے دو اضلاع میں ۱۱ اور ۸ گولیاں ہیں اور سب سے نچلی تہ کے چھوٹے ضلع میں ۲ گولیاں ہیں انبار میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

۳۸۔ ایک نامکمل مستطیلی انبار کی اوپر کی تہ کے اضلاع میں ۱۵ اور ۱۱ گولیاں ہیں معلوم کرو کہ کتنی اور گولیاں انبار کی تکمیل کے لیے کافی ہونگی۔

۳۹۔ ایک مثلثی انبار میں گولیوں کی تعداد ایک مربع انبار کی گولیوں کی نصف تعداد سے بقدر ۱۵۰ کے زیادہ ہے اور ہر ایک انبار میں ہتھوں کی تعداد یکساں ہے۔ مثلثی انبار کی سب سے نچلی تہ میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

۴۰۔ ایک نامکمل مربع انبار میں ۱۶ تہیں ہیں۔ اوپر کی تہ میں گولیوں کی تعداد نچلی تہ کی تعداد سے بقدر ۱۰۰ کے کم ہے۔ انبار میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

۴۱۔ ثابت کرو کہ ایک مربع انبار میں گولیوں کی تعداد اس سے دو چند ہتھوں والے مثلثی انبار کی گولیوں کی تعداد کی ایک چوتھائی ہے۔

۴۲۔ اگر ایک مثلثی انبار میں گولیوں کی تعداد کو ان گولیوں کی تعداد سے جو ایک مربع انبار میں شامل ہیں $۱۳:۵$ کی نسبت ہو اور مثلثی انبار کی نسبت مربع انبار میں ہوں کی تعداد دو چندان ہو تو ہر ایک انبار میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

۴۳۔ ۱۶ پونڈ وزنی گولیوں کے ایک مثلثی انبار کی قیمت ۵۱ پونڈ ہے اگر ایک ہنڈ روٹ ٹو ہے کی قیمت ۱۰ شلنگ ۶ پنس ہو تو سب سے پہلی تہ میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

۴۴۔ اگر ایک مکمل مربع انبار سے جس میں n تہیں ہیں گولیاں لے کر ایک ایسا مثلثی انبار بنایا جائے جس میں تہوں کی تعداد وہی ہو جو مربع انبار میں ہے تو ثابت کرو کہ باقی ماندہ گولیوں سے ایک دوسرا مثلثی انبار بن سکتا ہے۔ اس انبار کے قاعدے کے ضلع میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

اگر درجہ دوم کے دو ثنائی مرکب اصم جملوں میں ارتقام ایک ہی ہوں مگر وہ علامات جس کے ذریعے اُن کی دونوں رقیں مربوط ہیں مختلف ہوں تو انہیں ایک دوسرے کا زوج کہتے ہیں اور ان دونوں کا حاصل ضرب منطق ہے مثلاً $۳۱ + ۲۱$ کا زوج $۳۱ - ۲۱$ ہے اور ان دونوں کا حاصل ضرب ۱ ہے۔

اس سے ظاہر ہے کہ شکل $\frac{۱}{\overline{۱۱} + \overline{۱۱}}$ کے جملہ کا نسب نما

منطق بن جاتا ہے اگر ہم کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو نسب نما کے زوج $\overline{۱۱} - \overline{۱۱}$ سے ضرب دیں۔

نیز ایک ایسی کسر کا نسب نما جس میں تین مقادیر اصم درجہ دوم شامل ہوں ناطق بن سکتا ہے۔

فرض کرو کہ کسر مجوزہ $\frac{۱}{\overline{۱۱} + \overline{۱۱} + \overline{۱۱}}$ ہے اگر اس کے شمار کنندہ

اور نسب نما دونوں کو $\overline{۱۱} + \overline{۱۱} - \overline{۱۱}$ سے ضرب دیں تو اس عمل کے بعد نئی کسر کا نسب نما $(\overline{۱۱} + \overline{۱۱}) - (\overline{۱۱})$ یعنی $\overline{۱۱}$ ہوگا۔ اب اگر ایک اور دفعہ شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو نئے نسب نما کے زوج $(\overline{۱۱} + \overline{۱۱}) - (\overline{۱۱})$ سے ضرب دیں تو اس سے نسب نما ناطق بن جائیگا۔ یعنی آخری نسب نما $(\overline{۱۱} + \overline{۱۱}) - (\overline{۱۱}) = \overline{۱۱}$ جو ایک مقدار ناطق ہے۔

مثال۔ مختصر کرو $\frac{۱۲}{\overline{۲۱} ۲ - \overline{۵۱} + ۳}$

$$\frac{۱۲}{\overline{۲۱} ۲ - \overline{۵۱} + ۳} = \frac{۱۲}{(\overline{۲۱} ۲ + \overline{۵۱} + ۳) - (\overline{۵۱} + ۳)} = \frac{۱۲}{\overline{۲۱} ۲ + ۴}$$

$$= \frac{(۱ - \overline{۵۱})(\overline{۲۱} ۲ + \overline{۵۱} + ۳)}{(۱ - \overline{۵۱})(۱ + \overline{۵۱})}$$

$$2 + 5\sqrt{2} + 10\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 2 + 17\sqrt{2}$$

۷۷۔ جملہ ثنائی اصم کا منطق جزو ضرعی دریافت کرو۔

(۱) جملہ ثنائی کی صورت عامہ جس میں صرف دو مقادیر اصم

درجہ دوم شامل ہوں $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ یا $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ہے۔ کیونکہ اگر فن مربع کامل نہ ہو تو اس خاص صورت میں اس کی شکل $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ ہوگی جہاں c اور b دونوں مقادیر ناطق رہیں۔

ظاہر ہے کہ جملہ $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ کا منطق جزو ضرعی

$\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ہے کیونکہ اگر $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$ ہو تو

تو $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$

$\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c}$ جو ایک مقدار ناطق ہے۔

(۲) جملہ ثنائی اصم کی صورت عامہ $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ہے یا $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c} \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{c} - \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{c} - \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$$

اس سے معلوم ہوا کہ جملہ ثنائی اصم $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ کی تحویل ہمیشہ

صورت عامہ $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ کی طرف ہو سکتی ہے اس لیے ہم اس کا منطق جزو ضرعی دریافت کرتے ہیں۔

صورت اول۔ فرض کرو کہ ثنائی اصم $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ دیا ہوا ہے اور اس کا منطق جزو ضرعی مطلوب ہے۔

فرض کرو کہ $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c}$ اور $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{d}$ اور $\sqrt{c} + \sqrt{d} = \sqrt{e}$

ذو اصناف اقل n ہے تب ظاہر ہے کہ l_n اور m_n دونوں ناطق ہیں۔ اب n کی تمام قیمتوں کے لیے l_n ۔ m_n جملہ l_n ۔ m_n پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے

$$l_n - m_n = (l_n - m_n) (1 + l_n + l_n^2 + \dots + l_n^{n-1})$$

پس ظاہر ہے کہ منطق جزو ضرعی مطلوب

$$l_n - m_n = (l_n - m_n) (1 + l_n + l_n^2 + \dots + l_n^{n-1})$$

صورت دوم۔ فرض کرو کہ دیا ہوا ثنائی اصم l_n اور m_n ہے

نیز l_n ، m_n کے معنی وہی ہیں جو اوپر بیان ہوئے۔ تب

(۱) اگر n جفت ہو تو $l_n + m_n$ پر $l_n - m_n$ پورا تقسیم ہو سکتا ہے

$$l_n - m_n = (l_n + m_n) (1 - l_n + l_n^2 - \dots + (-1)^{n/2-1} l_n^{n/2-1})$$

پس اس صورت میں منطق جزو ضرعی $l_n - m_n$ ہے اور ناطق حاصل ضرب $l_n - m_n$

(ب) اگر n طاق ہو تو $l_n + m_n$ پر $l_n - m_n$ پورا تقسیم ہو سکتا ہے

$$l_n - m_n = (l_n + m_n) (1 - l_n + l_n^2 - \dots + (-1)^{(n-1)/2} l_n^{(n-1)/2})$$

پس منطق جزو ضرعی $l_n - m_n$ ہے اور ناطق حاصل ضرب $l_n - m_n$

ناطق حاصل ضرب $l_n - m_n$

مثال۔ $l_n + m_n$ کا منطق جزو ضرعی دریافت کرو۔

فرض کرو کہ $l_n = \frac{1}{2}$ ، $m_n = \frac{1}{2}$ تو l_n اور m_n دونوں ناطق ہیں۔

$$l_n - m_n = (l_n + m_n) (1 - l_n + l_n^2 - \dots + (-1)^{n-1} l_n^{n-1})$$

طرفین کا مربع لینے سے $n = 1 + m + 2am$

جس سے $\frac{n - 1 - m}{2} = am$

یعنی ایک مقدار اصم مقدار ناطق کے برابر ہوتی اور یہ باطل ہے۔

۷۹۔ اگر $1 + ab = la + ma$ جہاں مقادیر 1 اور la ناطق ہیں اور

ab اور ma غیر ناطق تو ثابت کرو کہ $1 = la$ اور $b = ma$

اگر 1 اور la برابر نہ ہوں تو فرض کرو کہ $1 = la + m$

تب $la + m + ab = la + ma$

اس لیے $m + ab = ma$

یعنی ma کا کچھ حصہ ناطق ہے اور کچھ حصہ غیر ناطق جو بموجب دفعہ سابق ناممکن ہے۔

اس لیے $1 = la$ اور $ab = ma$ یعنی $b = ma$

نوٹ۔ یاد رہے کہ نتیجہ مندرجہ بالا صرف اُس صورت میں صحیح ہو سکتا

ہے جبکہ مقادیر ab اور ma فی الحقیقت غیر ناطق ہوں مثلاً ربط

$5 + 9 = 25 + 3$ سے ہم یہ نتیجہ نہیں نکال سکتے کہ $5 = 3$ اور

$25 = 9$

۸۰۔ $1 + ab$ کا جذر دریافت کرو جہاں ab مقدار اصم ہے

فرض کرو کہ $1 + ab = la + ma$

طرفین کا مربع لینے سے $1 + ab = la + ma + 2lama$

اس لیے دفعہ گزشتہ کی مدد سے

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + la = ma \\ ab = 2lama \end{array} \right. \dots \dots \dots (۱)$$

اس لیے $1 - b = (la + ma)^2 - 4lama = (la - ma)^2$

$\therefore \sqrt{1 - b} = la - ma$

پس ہیں حاصل ہوا لا + ما = ل
 اور $\left\{ \begin{array}{l} \text{لا} - \text{ما} = \text{لا} - \text{ما} \\ \text{لا} - \text{ما} = \text{لا} - \text{ما} \end{array} \right.$

جمع اور تفریق سے
 $\text{لا}^۲ = \text{لا} + \text{لا} - \text{ما} = \text{لا} - \text{ما}$ اور $\text{ما}^۲ = \text{ما} - \text{لا} = \text{ما} - \text{لا}$

$\therefore \left[\text{لا} + \text{ما} = \text{لا} + \text{ما} \right] + \left[\text{لا} - \text{ما} = \text{لا} - \text{ما} \right] = \text{لا} + \text{ما} + \text{لا} - \text{ما} = ۲\text{لا}$

نوٹ۔ لا اور ما کی قیمتیں جو ہم نے اوپر معلوم کیں وہ اصلی جملہ سے بھی زیادہ پیچیدہ ہیں اس لیے اگر لا - ب مربع کامل نہ ہو تو وہ عملی سوالات میں اتنی کارآمد نہیں ہوتیں۔

نتیجہ صریح (۱) سے $\text{لا} - \text{ما} = \text{لا} - \text{ما} = \text{لا} - \text{ما} = \text{لا} - \text{ما}$

$\therefore \text{لا} - \text{ما} = \text{لا} - \text{ما}$

پس معلوم ہوا کہ اگر $\text{لا} + \text{ما} = \text{لا} + \text{ما}$

تو $\text{لا} - \text{ما} = \text{لا} - \text{ما}$

مثال۔ $\text{لا} + \text{ما} = ۱۰$ اور $\text{لا} - \text{ما} = ۲$

طرفین کا مربع لینے سے $\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ = ۱۰۰ + ۴ = ۱۰۴$

اس لیے $\text{لا} + \text{ما} = ۱۰$ اور $\text{لا} - \text{ما} = ۲$

اعداد ۵ اور ۲ سے شرائط معادلات بالا پوری ہوتی ہیں اس لیے

جذر مطلوب $\text{لا} = ۵$ اور $\text{ما} = ۲$

۸۱۔ بعض اوقات ہم ایسے جملہ کا جذر نکال سکتے ہیں جس میں دو سے زیادہ مقادیر اصم درجہ دوم مثال ہوں، اس کی توضیح عمل ذیل سے ہوگی۔

فرض کرو کہ جملہ $\text{لا} + \text{ما} + \text{جا} + \text{دا}$ کا جذر نکالنا مطلوب ہے

مثال - ۲۱ - ۲ - ۵۶ + ۸۳ - ۲۵ کا جذر نکالو

فرض کرو کہ $\overline{15} + \overline{38} + \overline{52} = \overline{15} + \overline{38} + \overline{52} = \overline{105}$

اس لیے جذر مطلوب $2\sqrt{3} + 2 - 5\sqrt{5}$ -

۸۴۔ اگر $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{e-f}{f}$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + 1$$

ناطق اور غیر ناطق حصوں کو آپس میں برابر کہنے سے

$$\overline{ab} + \overline{a}b = \overline{ab} + \overline{a}b + \overline{a}b = 1$$

$$(\overline{11} - 1) = \overline{11} - 1 = 10 \Rightarrow \overline{11} - 1 = 10 \Rightarrow \overline{11} = 11 \therefore$$

يعني $\overline{a-b} = \overline{a} - \overline{b}$

اسی طرح مسئلہ شنائی کی استعانت سے ہم ثابت کرتے ہیں کہ اگر

$$\overline{1 + 1} + \overline{1 + 1} = \overline{1 + 1} + \overline{1 + 1} \quad \text{تو } \overline{1 + 1} - \overline{1 + 1} = \overline{1 + 1} - \overline{1 + 1} \quad \text{جہاں } n \text{ کوئی صحیح}$$

مثبت عدد ہے۔

۸۴۔ ترکیب ذیل $1 \pm 1 + 1$ کی صورت کے جملوں کے جذور الکعب بعض اوقات دریافت ہو سکتے ہیں۔

$$\text{فرض کرو کہ } \overline{1 + 1} + \overline{1 + 1} = \overline{1 + 1} + \overline{1 + 1}$$

$$\text{تب } \overline{1 + 1} - \overline{1 + 1} = \overline{1 + 1} - \overline{1 + 1}$$

$$\text{اس لیے } \overline{1 + 1} - \overline{1 + 1} = \overline{1 + 1} - \overline{1 + 1} \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{نیز بموجب دفعہ گزشتہ } \overline{1 + 1} + \overline{1 + 1} = \overline{1 + 1} + \overline{1 + 1} \dots \dots \dots (2)$$

اب لا اور ما کی قیمتیں (۱) اور (۲) سے ذیل کے طریقہ سے دریافت کرتے ہیں (۱) میں فرض کرو کہ $\overline{1 + 1} - \overline{1 + 1} = \overline{1 + 1} - \overline{1 + 1}$ تب ج ما کی قیمت (۲) میں رکھنے سے ہمیں حاصل ہوگا۔

$$1 = \overline{1 + 1} + \overline{1 + 1} - (\overline{1 + 1} - \overline{1 + 1})$$

$$\text{یعنی } 2 - \overline{1 + 1} - \overline{1 + 1} = 1$$

اگر مساوات میں بطور آزمائش مختلف قیمتیں رکھنے سے لا کی ایک قیمت مل جائے تو ما کی قیمت مساوات $1 = \overline{1 + 1} - \overline{1 + 1}$ ج سے معلوم ہو سکیگی۔

نوٹ۔ ہم یہاں جذور الکعب مطلوب کو $\overline{1 + 1} + \overline{1 + 1}$ کی شکل میں نہیں رکھتے کیونکہ اگر اس کو تیسری قوت پر اٹھایا جائے تو

$$1 + 1 = \overline{1 + 1} + \overline{1 + 1} + \overline{1 + 1} + \overline{1 + 1} + \overline{1 + 1} + \overline{1 + 1}$$

اب چونکہ بائیں طرف کی ہر ایک رقم اصم ہے اس لیے ہم طرفین کے

ناطق اور اصم حصوں کو آپس میں برابر نہیں رکھ سکتے۔

مثال - ۴۲ - ۳۲ ہ کا جذر الکعب دریافت کرو۔

$$\sqrt[3]{42 - 32} = \sqrt[3]{10} = 1 - 1$$

$$\sqrt[3]{42 + 32} = \sqrt[3]{74} = 1 + 1$$

دونوں کو ضرب دینے سے $\sqrt[3]{42 - 32} \times \sqrt[3]{42 + 32} = 1 - 1 = 0$

$$\sqrt[3]{42 - 32} = 1 - 1 \quad \text{یعنی} \quad (1) \dots\dots\dots$$

$$\sqrt[3]{42 - 32} = \sqrt[3]{42 - 32} = \sqrt[3]{42 - 32} = \sqrt[3]{42 - 32}$$

$$\sqrt[3]{42 - 32} = \sqrt[3]{42 - 32} = \sqrt[3]{42 - 32} = \sqrt[3]{42 - 32} \quad \text{جس سے معلوم ہوتا ہے کہ} \quad (2) \dots\dots\dots$$

$$(1) \text{ اور } (2) \text{ سے } \sqrt[3]{42 - 32} = \sqrt[3]{42 - 32} = \sqrt[3]{42 - 32} = \sqrt[3]{42 - 32}$$

$$\sqrt[3]{42 - 32} = \sqrt[3]{42 - 32} = \sqrt[3]{42 - 32} = \sqrt[3]{42 - 32} \quad \text{یعنی}$$

$$\sqrt[3]{42 - 32} = \sqrt[3]{42 - 32} = \sqrt[3]{42 - 32} = \sqrt[3]{42 - 32} \quad \text{جس سے}$$

$$\sqrt[3]{42 - 32} = \sqrt[3]{42 - 32} = \sqrt[3]{42 - 32} = \sqrt[3]{42 - 32} \quad \text{اور جذر الکعب}$$

۴۲ - ۳۲ ہ کا جذر الکعب مطلوب ہو

دو مقادیر اصم درجہ دوم مثال ہوں تو ہمیں اس طرح عمل کرنا چاہیے۔

مثال - ۳۱۱ + ۳۱۹ ہ کا جذر الکعب دریافت کرو۔

$$\sqrt[3]{311 + 319} = \sqrt[3]{311 + 319} = \sqrt[3]{311 + 319} = \sqrt[3]{311 + 319}$$

واقعہ سابق کے مطابق عمل کرنے سے حاصل ہوگا۔

$$\sqrt[3]{311 + 319} = \sqrt[3]{311 + 319} = \sqrt[3]{311 + 319} = \sqrt[3]{311 + 319}$$

$$\sqrt[3]{311 + 319} = \sqrt[3]{311 + 319} = \sqrt[3]{311 + 319} = \sqrt[3]{311 + 319} \quad \therefore \text{جذر الکعب مطلوب}$$

۵۵ - اب ہم مقادیر اصم کی چند مشکل مثالیں حل کرتے ہیں۔

مثال - $\frac{9}{1} - \frac{3}{1} + \frac{1}{1}$ کے نسب نما کو ناطق بناؤ۔

$$\text{جملہ} = \frac{\frac{1}{3} \times (1 + \frac{1}{3})}{(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3})} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}}$$

$$1 + \frac{1}{3} = \frac{(1 + \frac{1}{3}) \times \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} =$$

مثال ۲۔ $\frac{3}{4} - (1 - \frac{1}{2}) + \sqrt{2 - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2}}$ کا جذر نکالو

$$\text{جملہ} = \frac{1}{4} = \frac{\{ \sqrt{(2 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})} \} \times \{ 2 + 3 - \frac{1}{2} \}}{4}$$

$$= \frac{1}{4} = \frac{\{ \sqrt{(2 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})} \} \times \{ 2 + (2 - \frac{1}{2}) + (1 + \frac{1}{2}) \}}{4}$$

ظاہر ہے کہ جذر مطلوب $= \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2 - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}}}$

مثال ۳۔ معلوم ہے $\sqrt{5} = 2.23606$

$$\frac{\sqrt{5} - 3}{\sqrt{5} - 3 + 2} \text{ کی قیمت دریافت کرو۔}$$

شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو ۲ سے ضرب دیں تو

$$\text{جملہ} = \frac{\sqrt{5} - 3}{\sqrt{5} - 3 + 2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 3 + 2} = \frac{\sqrt{5} - 4}{\sqrt{5} - 1 + 2} = \frac{\sqrt{5} - 4}{\sqrt{5} + 1} = \frac{1}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0.44721$$

مثال ۴۔ مساوات $\sqrt{12 - 11} + \sqrt{2 + 11} = 8$ کو حل کرو۔

عمل نقل سے $\sqrt{12 - 11} - 8 = -\sqrt{2 + 11}$
طرفین کا مربع لینے سے

$$12 - 11 + 12 - 11 = 2 + 11$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$۱۶ \text{ لا } - ۱۴ = ۲، \text{ یعنی لا } - ۱۴ = ۳$$

$$\text{اس لیے لا } - ۱۴ = ۹ = ۲۳$$

امثلہ نمبری (۷)

ذیل کی کسروں کے نسب تماؤں کو ناطق بناؤ۔

$$۱- \frac{۱}{۳۲ - ۲۲ + ۱}، ۲- \frac{۲۲}{۵۲ - ۳۲ + ۲۲}$$

$$۳- \frac{۱}{۳۲ + ۲۲ + ۱۰۲}، ۴- \frac{۱ + ۲۲}{۱۰۲ - ۱ + ۳۲ + ۲۲ + ۱}$$

$$۵- \frac{۳۲ - ۵۲ + ۱۰۲}{۵۲ - ۱۰۲ + ۳۲}، ۶- \frac{(۲۲ + ۵۲)(۵۲ + ۳۲)}{۵۲ + ۳۲ + ۲۲}$$

ذیل کے جملوں کا منطق جزو ضربی دریافت کرو۔

$$۷- ۲۲ - ۳۲^۲، ۸- ۲۲^۳ + ۵۲$$

$$۹- \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}، ۱۰- ۳۲^۳ - ۱$$

$$۱۱- ۲۲^۳ + ۲، ۱۲- ۳۲^۳ - ۵۲^۳$$

$$۱۳- \frac{۱ - ۳۲^۳}{۱ + ۳۲^۳} \text{ کے نسب نما کو ناطق بناؤ۔}$$

$$۱۴- \frac{\frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۹}}{\frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۹}} \text{ کے نسب نما کو ناطق بناؤ}$$

$$۱۵- \frac{۳۲^۳ ۲۲}{۳۲^۳ + ۲۲} \text{ کے نسب نما کو ناطق بناؤ۔}$$

$$۱۶ - \frac{۳۲}{۹۲ + ۳۲} \text{ کے نسب نما کو ناطق بناؤ۔}$$

$$۱۷ - \frac{۳۲ + ۸۲}{۳۲ - ۸۲} \text{ کے نسب نما کو ناطق بناؤ۔}$$

$$۱۸ - \frac{۲۶۲}{۹۲ - ۳} \text{ کے نسب نما کو ناطق بناؤ}$$

ذیل کے جلوں کا جذر نکالو۔

$$۱۹ - ۱۶ - ۲۰۲ - ۲۸۲ - ۳۵۲$$

$$۲۰ - ۲۲ + ۱۵۲ - ۲۱۲ - ۲۵۲$$

$$۲۱ - ۶ + ۱۲۲ - ۲۳۲ - ۸۲$$

$$۲۲ - ۵ - ۱۰۲ - ۱۵۲ - ۶۲$$

$$۲۳ - ۱ + ۳۲ - ۴۲ + ۲۲ - ۳۲ - ۳۲$$

$$۲۴ - ۲۱ + ۸۲ - ۳۲ - ۴۲ - ۵۲ - ۲۱۲ + ۲۱۲$$

جملات ذیل کے جذر انکسب دریافت کرو۔

$$۲۵ - ۲۲ + ۶ - ۲۲ - ۵۲ + ۱۶ - ۲۶$$

$$۲۶ - ۳۲ - ۱۱۲ - ۳۲ - ۹۹ - ۴۰ - ۲۸$$

$$۲۹ - ۱۲۵ - ۳۲ - ۸۴ - ۹۲ - ۳۰ - ۱ + (۱ + ۲) \frac{1}{2} \text{ کا جذر نکالو}$$

$$۳۱ - ۱ + ۲ + (۱ + ۲ + ۲) \text{ کا جذر نکالو}$$

$$۳۲ - \text{اگر } \frac{۱}{۳۲ - ۲} = \text{اور } \frac{۱}{۳۲ + ۲} =$$

تو ۱۱ اور ۱۱ ب - ۱۱ کی قیمت دریافت کرو۔

$$۳۳ - \text{اگر } \frac{۳۲ - ۳۲}{۳۲ + ۳۲} = \text{اور } \frac{۳۲ + ۳۲}{۳۲ - ۳۲} =$$

تو ۳ لا - ۵ لا + ۳ لا کی قیمت دریافت کرو۔

ذیل کے جلوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

$$\frac{\sqrt{362+4}}{\sqrt{3619-332}} - 33$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{362+4}) - \frac{1}{2}(\sqrt{3610-48}) - 35$$

$$36 - \text{اگر } \sqrt{362} = 32.508 \text{ تو } \frac{1}{\sqrt{362}+2} \text{ کی قیمت دریافت کرو۔}$$

$$36 - \text{اگر } \sqrt{56} = 7.483 \text{ تو}$$

$$\frac{\sqrt{182} + \sqrt{102}}{\sqrt{56} - \sqrt{36} + \sqrt{82}} - \frac{\sqrt{110}}{\sqrt{56} + \sqrt{36} - \sqrt{182}} \text{ کی قیمت دریافت کرو}$$

$$38 - \text{اگر } \sqrt{2} = 1.414 \text{ تو } \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2}} \text{ کی قیمت دریافت کرو}$$

مساویات ذیل کو حل کرو۔

$$39 - \sqrt{11+11} - \sqrt{11} = 1$$

$$40 - \sqrt{4+11} + \sqrt{5-11} = 9$$

$$41 - \sqrt{1-11} = \sqrt{1-11} + \sqrt{1-11}$$

$$42 - \sqrt{1+11} + \sqrt{1+11} = \sqrt{1+11}$$

$$43 - \text{ثابت کرو کہ } \sqrt{2+5} - \sqrt{2-5} = 1$$

ابن شتم

مقادیر خیالی

۸۶۔ فرض کرو کہ کسی مقدار منفی ۱ کا جذر نکالنا مطلوب ہے، اس میں ایک نئی شکل ہے۔ $\infty + \infty$ تک تمام مقادیر جبریہ کے مربعے مثبت ہوتے ہیں۔ اس لیے ایسی کوئی مقدار فی الحال ہم کو معلوم نہیں جس کا مربع ۱ کے برابر ہو۔ اب اگر ہم اپنے اعمال جبریہ کی تعجیم کو بدستور قائم رکھنا چاہتے ہیں تو مقادیر جبریہ کے میدان کو وسیع کیے بغیر چارہ نہیں۔ ہم اس جگہ ایک نئی خیالی اکائی یا خیالی مقدار کو اپنی تحقیقات جبریہ میں شامل کرتے ہیں اس خیالی مقدار کو ہم ہمیشہ حرف خ یا χ سے تعبیر کریں گے اور اس کی تعریف ہوگی۔

$$\chi^2 = \overline{1} \times \overline{1} = 1$$

ظاہر ہے کہ χ کسی مقدار حقیقی کے برابر نہیں ہو سکتی کیونکہ تمام حقیقی مقادیر کے مربعے مثبت ہوتے ہیں χ کے تمام خواص ہم اس کی تعریف سے اخذ کریں گے۔

$$۸۷۔ \text{بوجب تعریف } \overline{1} \times \overline{1} = 1$$

طرفین کو ۱ میں ضرب دینے سے $\overline{1} \times \overline{1} \times \overline{1} = 1$ (۱-)

$$\text{یعنی } (\overline{1} \times \overline{1}) = 1$$

$$یا \overline{a} = \overline{1-a} \times \overline{1-a}$$

پس معلوم ہوا کہ حاصل ضرب $\overline{1-a} \times \overline{1-a}$ کو مقدار خیالی $\overline{1-a}$ کے برابر خیال کرنا چاہیے۔

۸۸۔ عام طور پر کسی جملہ کی خیالی خصلت کو ظاہر کرنے کے لیے بہتر ہوگا کہ ہم علامت خیالی $\overline{1-a}$ کو واضح طور پر علیحدہ کر کے لکھیں۔

$$\text{مثلاً } \overline{1-a}^2 = \overline{1-a} \times \overline{1-a}$$

$$\overline{1-a} \times \overline{1-a} = (\overline{1-a})^2$$

۸۹۔ تا وقتیکہ اس کے خلاف کوئی صراحت نہ ہو ہم آئندہ ہر ایک علامت جذر کے پہلے علامت مثبت کو متصرف خیال کریں گے مگر مقادیر خیالی کی بحث میں ایک بات قابل غور ہے۔

$$\text{چونکہ } \overline{1-a} = (\overline{1-a}) \times \overline{1-a}$$

$$\text{جذر لینے سے } \overline{1-a} = (\overline{1-a}) \times \overline{1-a}$$

بظاہر اس سے معلوم ہوتا ہے کہ $\overline{1-a}$ اور $\overline{1-a}$ کا حاصل ضرب دریافت کرنے میں ہم $\overline{1-a}$ کے ماقبل کوئی سی علامت مثبت یا منفی لے سکتے ہیں مگر یہ درست نہیں کیونکہ

$$\overline{1-a} \times \overline{1-a} = \overline{1-a} \times \overline{1-a} \times \overline{1-a} \times \overline{1-a}$$

$$= \overline{1-a}^2 = \overline{1-a}^2$$

$$\overline{1-a} \times \overline{1-a} = \overline{1-a}^2$$

۹۰۔ اگر کسی حقیقی مقدار a میں کسی خالص مقدار خیالی b کو جمع کر دیا جائے تو جملہ $a + b$ حاصل ہوگا اسے ہم جملہ خیالی کے نام سے موسوم کریں گے۔ یاد رہے کہ تمام خیالی جملے $a + b$ کی صورت میں لائے جاسکتے ہیں اس جملے میں a اور b دونوں حقیقی مقداریں ہیں۔ مگر یہ ضروری نہیں کہ ناطق بھی ہوں۔

۹۰۱۔ مقادیر خیالی پر عمل کرتے وقت ہم ان ہی قوانین جبریہ کو

مثال ۲- $(1 + b^{-1})(c + d^{-1})$

۹۱۔ اگر $1 + \frac{1}{2} = 1$ تو $1 = 0$ اور $0 = 0$

تو $\frac{1}{1-i} = 1+i$

اس لیے $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

پس معلوم ہوا کہ $r = 0$ اور $b = 0$ ۔

$$92 - اگر 1 + 1 - 1 = 1 + 1 - 1$$

تور = ج اور پ = و

عمل نقل سے ۱-ج + (ب-د) ۱-۱ = ۰

بموجب دفعہ سابق ۱-ج = ۰ یعنی ۱ = ج

اور پ-د = یعنی ب = د

اور ب۔ د = یعنی ب = د
پس معلوم ہوا کہ دو خیالی جملوں کے باہم مساوی ہوتے کے لیے
یہ ضروری اور کافی ہے کہ اُن کے حقیقی حصے آپس میں برابر ہوں اور ان کے
خیالی حصے بھی آپس میں برابر ہوں۔

۹۳۔ تعریف۔ دو خیالی حملے جو صرف اپنے خیالی حصوں میں

مختلف علامت ہوتی ایک دوسرے کے مزدوج کہلاتے ہیں اور ان میں سے ہر ایک کو دوسرے کا زوج کہتے ہیں۔

مثلاً ۳-۲-۱ اور ۳+۲-۱ ایک دوسرے کے مزدوج ہیں۔

ایسے ہی۔ $1-2$ اور $2-1$ اور بالعموم $1-2$ اور $2-1$ اور

۱- ب-۱-۱ ایک دوسرے کے مزدوج ہیں۔

۹۴- دو مزدوج خیالی جلوں کے حاصل جمع اور حاصل ضرب مقادیر حقیقی ہوتے ہیں۔

$$\text{کیونکہ } ۱ + ب-۱-۱ + ۱-۱-۱ = ۱۲$$

$$\text{اور } (۱ + ب-۱-۱)(۱-۱-۱) = (۱-۱-۱) = ۱-۱-۱ = ۱ + ب-۱-۱$$

۹۵- تعریف - ۱ + ب-۱-۱ کے جذر کی مثبت قیمت کو ہر دو مزدوج

خیالی جلوں ۱ + ب-۱-۱ اور ۱-۱-۱ کا مقیاس کہتے ہیں ہم ۱ + ب-۱-۱ کے مقیاس کو مت (۱ + ب-۱-۱) سے تعمیر کریں گے۔

$$\therefore \text{بموجب تعریف مت } (۱ + ب-۱-۱) = ۱ + ب-۱-۱ + ۱ + ب-۱-۱$$

$$\text{مثال ۱- مت } (۱ + ب-۱-۱) = ۱ + ب-۱-۱ + ۱ + ب-۱-۱ = ۵$$

$$\text{مثال ۲- مت } (۱-۱-۱) = ۱-۱-۱ + ۱-۱-۱ = ۵$$

$$\text{مثال ۳- مت } (۱-۱-۱) = ۱-۱-۱ + ۱-۱-۱ = ۱۲$$

۹۶- دو خیالی جلوں کے حاصل ضرب کا مقیاس ان جلوں کے

مقیاسوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ۱ + ب-۱-۱ اور ۱-۱-۱ دو جملے ہیں۔

ان کا حاصل ضرب = ۱-۱-۱ - ب-۱-۱ + (۱ + ب-۱-۱) ایک

خیالی جملہ ہے۔

$$\text{اور اس کا مقیاس } = (۱-۱-۱ - ب-۱-۱ + (۱ + ب-۱-۱))$$

$$= ۱-۱-۱ + ۱-۱-۱ + ۱ + ب-۱-۱ = ۱-۱-۱ + ۱-۱-۱ + ۱ + ب-۱-۱$$

$$= (۱-۱-۱ + ۱-۱-۱) (۱ + ب-۱-۱)$$

$$= ۱-۱-۱ + ۱-۱-۱ + ۱ + ب-۱-۱ = ۱-۱-۱ + ۱-۱-۱ + ۱ + ب-۱-۱$$

۹۷- اگر کوئی عدد خیالی معدوم ہو جائے تو اس کا مقیاس بھی

معدوم ہو جائے گا اور برعکس اس کے اگر کسی عدد خیالی کا مقیاس معدوم ہو جائے
تو وہ عدد بھی معدوم ہو جائے گا۔

$$\therefore \text{اگر } ۱ + ۱ = ۱ - ۱ = ۰ \text{ تو } ۱ = ۰ \text{ اور } ۱ = ۰$$

$$\text{اس لیے } ۱ + ۱ = ۰$$

$$\text{نیز اگر } ۱ + ۱ = ۰ \text{ تو } ۱ + ۱ = ۰$$

۱ اور ۱ ہر دو مثبت مقادیر ہیں۔ ان کا مجموعہ اُسی صورت میں
صفر ہو سکتا ہے جبکہ ان میں سے ہر ایک مقدار صفر ہو۔ یعنی

$$۱ = ۰ \text{ اور } ۱ = ۰$$

اگر دو اعداد خیالی برابر ہوں تو ان کے مقیاس برابر ہونگے
مگر اس کا عکس صحیح نہیں۔

$$\text{دیکھو } ۱ + ۱ = ۱ - ۱ = ۰ \text{ اور } ۱ + ۱ = ۱ - ۱ = ۰$$

$$\text{تو } ۱ = ۱ \text{ اور } ۱ = ۱$$

$$\therefore ۱ + ۱ = ۱ + ۱$$

$$\text{برعکس اس کے اگر } ۱ + ۱ = ۱ + ۱$$

$$\text{تو یہ ضروری نہیں کہ } ۱ = ۱ \text{ اور } ۱ = ۱$$

مثال۔ (۱ - ۱ + ۱) (۱ - ۱ + ۱) (۱ - ۱ + ۱) کا مقیاس دریافت کرو

$$\text{مق } \{ (۱ - ۱ + ۱) (۱ - ۱ + ۱) (۱ - ۱ + ۱) \}$$

$$= \text{مق } (۱ - ۱ + ۱) \times \text{مق } (۱ - ۱ + ۱) \times \text{مق } (۱ - ۱ + ۱)$$

$$= ۱۳۱ \times ۱۳۱ \times ۱۳۱ = ۲۱۶۱۳$$

۹۸۔ اگر کسی کسر کا نسب نما ۱ + ۱ - ۱ کی شکل کا خیالی جملہ ہو تو

کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو مزدوج جملہ ۱ - ۱ + ۱ سے ضرب
دینے سے نسب نما حقیقی بن جاتا ہے۔

$$\text{مثلاً} \frac{(ج + د - ۱)(ج + د - ۱ - ۱)}{(ج + د - ۱)(ج + د - ۱ - ۱)} = \frac{ج + د - ۱}{ج + د - ۱ - ۱}$$

$$= \frac{ج + د - ۱}{ج + د - ۱ - ۱}$$

$$\frac{ج + د - ۱}{ج + د - ۱ - ۱} = \frac{ج + د - ۱}{ج + د - ۱ - ۱}$$

پس مندرجہ بالا نتیجہ اور دفعہ او ۹۰ کی مدد سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ دو خیالی جملوں کا حاصل جمع، حاصل تفریق، حاصل ضرب اور خارج قسمت میں سے ہر ایک، ایک خیالی جملہ ہے۔

$$۹۹ - ۱ + ب - ۱ کا جذر نکالو۔$$

فرض کرو کہ $۱ + ب - ۱ = لا + ما - ۱$ جہاں لا اور ما دونوں مقادیر حقیقی ہیں۔

طرفین کا مربع لینے سے $۱ + ب - ۱ = لا - ما + ۲ لا ما - ۱$

$$\therefore لا - ما = ۱ \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{اور } ۲ لا ما = ب \dots \dots \dots (۲)$$

$$(لا + ما)^۲ = (لا - ما)^۲ + (۲ لا ما) = ۱ + ب$$

$$\therefore لا + ما = \sqrt{۱ + ب} \dots \dots \dots (۳)$$

علامت جذر کے ماقبل ہم نے مثبت علامت اس لیے لکھی ہے کہ لا + ما ایک مثبت مقدار ہے کیونکہ لا اور ما دونوں حقیقی مقادیر ہیں۔

(۱) اور (۳) سے معلوم ہوا کہ

$$لا = \frac{۱ + ب + \sqrt{۱ + ب}}{۲}$$

$$\therefore لا = \frac{۱ + ب + \sqrt{۱ + ب}}{۲} \text{ اور } ما = \frac{۱ + ب - \sqrt{۱ + ب}}{۲}$$

مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ حاصل ضرب لا ما کی وہی علامت ہوگی جو سب کی ہے۔

مثال ۱۔ $\sqrt{-۴۴-۱}$ کا جذر نکالو۔

فرض کرو کہ $\sqrt{-۴۴-۱} = \sqrt{-۴۴} + لا$

تب $\sqrt{-۴۴-۱} = \sqrt{-۴۴} + لا^۲ + ۲ لا ما$

∴ $لا - ما^۲ = -۴۴$ (۱)

اور $۲ لا ما = -۴۴$

اب $(لا + ما^۲)^۲ = (لا - ما^۲)^۲ + (۲ لا ما)^۲ = ۴۴ + ۴۴ = ۸۸$

∴ $لا + ما^۲ = ۲۲$ (۲)

(۱) اور (۲) سے معلوم ہوا کہ $لا = ۹$ اور $ما^۲ = ۱۶$

∴ $لا = ۳ \pm$ اور $ما = ۴ \pm$

چونکہ حاصل ضرب لا ما منفی ہے اس لیے $لا = ۳$ اور $ما = -۴$ یا $لا = -۳$

اور $ما = ۴$

پس مطلوبہ جذر ہے $\sqrt{-۴۴-۱} = ۳ - ۴$ یا $\sqrt{-۴۴-۱} = -۳ + ۴$

یعنی $\sqrt{-۴۴-۱} = \pm (۳ - ۴)$

مثال ۲۔ $\sqrt{۴۴-۱}$ کی قیمت دریافت کرو۔

$\sqrt{۴۴-۱} = \sqrt{۴۴} \pm ۱ = ۶ \pm ۱$

اب ہمیں $\sqrt{۴۴} \pm ۱$ کی قیمت دریافت کرنی ہے۔

فرض کرو کہ $\sqrt{۴۴} \pm ۱ = \sqrt{۴۴} + لا$

تب $\sqrt{۴۴} \pm ۱ = \sqrt{۴۴} + لا^۲ + ۲ لا ما$

∴ $لا - ما^۲ = ۰$ اور $۲ لا ما = ۱$

جس سے معلوم ہوا کہ $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ اور $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ یا $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ اور $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \pm \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} (1 \pm 1)$$

اسی طرح سے $\frac{1}{\sqrt{a}} \pm \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} (1 \pm 1)$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \pm \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} (1 \pm 1)$$

$$\text{اور } \frac{1}{\sqrt{a}} \pm \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} (1 \pm 1)$$

۱۰۰۔ $\frac{1}{\sqrt{a}}$ یا $\frac{1}{\sqrt{a}}$ کی قوتیں

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ یا } \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ یا } \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ یا } \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ یا } \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

چونکہ $\frac{1}{\sqrt{a}}$ کی ہر ایک قوت اپنی قوت ماقبل کو $\frac{1}{\sqrt{a}}$ کے ساتھ ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے اس لیے ظاہر ہے کہ دور بندرجہ بالا کے بعد $\frac{1}{\sqrt{a}}$ کی خواہ کوئی قوت لی جائے وہی نتائج تکرار پائینگے جو اوپر مندرجہ ہیں مثلاً

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

۱۰۱۔ اب ہم مقادیر خیالی کے چند کارآمد خواص دریافت کریں گے۔

فرض کرو کہ لا = $\sqrt[3]{1}$ تب لا = ۱ یا لا = -۱ = ۰

یعنی $(1 - لا)(1 + لا + لا^2) = ۰$

اس لیے لا = ۱ = ۰ یا لا = لا + لا^2 = ۰

جس سے لا = ۱ یا لا = $\frac{1 - \sqrt[3]{-1}}{2}$

اگر ہم لا کی مندرجہ بالا قیمتوں میں سے کسی ایک کی تیسری قوت لیں تو ہر ایک صورت میں عدد ایک حاصل ہوگا پس معلوم ہوا کہ

اکائی کے جذر الکعب کی تین قیمتیں 1 ، $\frac{1 - \sqrt[3]{-1}}{2}$ ، $\frac{1 - \sqrt[3]{-1}}{2}$ ہیں

اور ان میں سے دو خیالی ہیں اور ایک حقیقی۔

اب ہم ثابت کریں گے کہ جذر الکعب کی خیالی قیمتوں میں سے ہر ایک

دوسری قیمت کے مربع کے برابر ہے۔

$$\frac{1 - \sqrt[3]{-1}}{2} = \frac{1 - \sqrt[3]{-1}}{2} = \left(\frac{1 - \sqrt[3]{-1}}{2}\right)^2$$

$$\frac{1 - \sqrt[3]{-1}}{2} =$$

$$\frac{1 - \sqrt[3]{-1}}{2} = \frac{1 - \sqrt[3]{-1}}{2} = \left(\frac{1 - \sqrt[3]{-1}}{2}\right)^2$$

$$\frac{1 - \sqrt[3]{-1}}{2} =$$

۱۰۲۔ چونکہ اکائی کے خیالی جذر الکعبوں میں سے ہر ایک دوسرے

کا مربع ہے، اس لیے انہیں عموماً سہ اور سہ سے تعبیر کیا جاتا ہے

لہذا اکائی کے تین جذر الکعب ہیں۔

۱، سہ اور سہ۔

چونکہ مساوات $لا + لا + ۱ = ۰$ کی ایک اصل سہ ہے، اس لیے
 $سہ + سہ + ۱ = ۰$ یعنی اکائی کے تین جذر الکعبوں کا حاصل جمع صفر ہے۔
 نیز چونکہ $سہ \times سہ = سہ = ۱$

اس لیے اکائی کے دو خیالی جذر الکعبوں کا حاصل ضرب ایک
 ہے اور سہ کی ہر صحیح قوت بھی ایک کے برابر ہے۔

۱۰۳۔ یاد رہے کہ سہ کی تمام مثبت صحیح قوتیں علی التواتر اسے سہ
 ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ n کوئی صحیح مثبت عدد ہے اگر یہ تین کا ضعف ہو تو
 لازماً اس کی صورت $۳م$ ہوگی اور $سہ = سہ = ۱$

اگر n تین کا ضعف نہ ہو تو اس کی صورت $۳م + ۱$ یا $۳م + ۲$
 ہوگی۔

$$\text{اگر } n = ۳م + ۱ \text{ تو } سہ = سہ = ۱ + سہ = سہ \times سہ = سہ$$

$$\text{اگر } n = ۳م + ۲ \text{ تو } سہ = سہ = ۲ + سہ = سہ \times سہ = سہ$$

۱۰۴۔ اب ہمیں معلوم ہو گیا کہ ہر ایک مقدار حقیقی کے تین
 جذر الکعب ہوتے ہیں جن میں دو خیالی ہیں کیونکہ $\sqrt[3]{۱}$ کا جذر الکعب وہی
 ہے جو حاصل ضرب $\sqrt[3]{۱} \times \sqrt[3]{۱}$ کا اس لیے جذر کی تین قیمتیں $\sqrt[3]{۱}$ ، $\sqrt[3]{۱}$ ، $\sqrt[3]{۱}$
 ہیں۔

اسی طرح سے $\sqrt[3]{۹}$ کے جذر الکعب کی قیمتیں $\sqrt[3]{۹}$ ، $\sqrt[3]{۹}$ ، $\sqrt[3]{۹}$ $\times \sqrt[3]{۹} \times \sqrt[3]{۹} = ۹$

ہیں جہاں $\sqrt[3]{۹}$ وہ جذر الکعب ہے جو معمولی حسابی طریقہ سے نکالا گیا ہے۔

مثال ۱۔ $\frac{(۲ + \sqrt{-۱۲})}{\sqrt{-۱} + ۲}$ کو $\sqrt{-۱}$ کی صورت میں لاؤ

$$\frac{\sqrt{-۱} + ۲ = ۳ - ۲\sqrt{-۱} + ۱۲}{\sqrt{-۱} + ۲}$$

$$\frac{(۲ - \sqrt{-۱})(۲ + \sqrt{-۱})}{(\sqrt{-۱} - ۲)(\sqrt{-۱} + ۲)} =$$

$$= 9 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - 1 = 8$$

مثال ۵۔ ثابت کرو کہ $(1 + s - s^2)^3 - (1 - s + s^2)^3 = 0$
 چونکہ $1 + s + s^2 = 0$

$$\therefore (1 + s - s^2)^3 - (1 - s + s^2)^3 = (1 - s + s^2)^3 - (1 - s + s^2)^3 = 0$$

امثلہ نمبری ۸

$$\begin{aligned} 1 - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} & \text{ سے ضرب دو} \\ 2 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2} - 5\sqrt{3} & \text{ سے ضرب دو} \\ 3 - 11\sqrt{2} + 11\sqrt{3} - 1\sqrt{5} & \text{ سے ضرب دو} \end{aligned}$$

ذیل کے جملوں کے نسب نماؤں کو ناطق بناؤ۔

$$\begin{aligned} 4 - \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{5\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} \\ 5 - \frac{11\sqrt{2} + 11\sqrt{3} - \sqrt{5}}{11\sqrt{2} + 11\sqrt{3} - \sqrt{5}} \\ 6 - \frac{(11\sqrt{2} + 11\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 - (11\sqrt{2} - 11\sqrt{3} + \sqrt{5})^2}{(11\sqrt{2} + 11\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 - (11\sqrt{2} - 11\sqrt{3} + \sqrt{5})^2} \end{aligned}$$

۷۔ $(1 - \sqrt{2})^{2+5}$ کی قیمت دریافت کرو، اس میں مثبت صحیح عدد

ذیل کے جملوں کا جذر نکالو۔

$$\begin{aligned} 8 - 11\sqrt{2} - 10\sqrt{3} - 9\sqrt{4} \\ 10 - 12\sqrt{2} + 12\sqrt{3} - 11\sqrt{4} \end{aligned}$$

ذیل کے جملوں کو x کی صورت میں لاؤ۔

$$\begin{aligned} 13 - \frac{x+1}{x-1} \\ 14 - \frac{4x^2 - 3x}{4x^2 - 3x + 2} \end{aligned}$$

$$۱۴- \frac{(1+x^2)}{1-x^2} - \frac{(1-x^2)}{1+x^2}$$

$$۱۵- \frac{(x+1)}{x-3}$$

$$۱۶- \frac{1-1}{1-2} + \frac{1+1}{1+2}$$

$$۱۷- \frac{1-29}{1-4} + \frac{1+39}{1+8}$$

$$۱۸- \text{ثابت کرو کہ } \left(\frac{3x-1}{2} \right) + \left(\frac{3x+1}{2} \right) = 1$$

جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے مگر ۳ کا ضعف نہیں ہے۔

$$۱۹- (1-x)(1+x)(1-x^2)(1+x^2) \text{ کو لاکھ قوتوں میں پھیلاؤ اور ترتیب دو۔}$$

$$۲۰- \text{ثابت کرو کہ } \{ (1-x)(1+x) \} = \{ (1-x^2) \}$$

$$= \{ (1-x)(1+x) \}$$

$$۲۱- \text{ثابت کرو کہ } \{ (1-x)(1+x) \} = \{ (1-x^2) \}$$

$$۲۲- \frac{(x^2+2)(x^2-2)}{(x^2+9)(x^2-15)} \text{ کا مقیاس دریافت کرو۔}$$

اگر اس سے لاکھ کئی تین جذور الکعب ہوں تو ثابت کرو کہ

$$۲۳- (1-s^2)(1+s^2) = (1-s^4)$$

$$۲۴- (1+s^2) = (1-s^2)$$

$$۲۵- (1-s^2)(1-s^4)(1-s^8) = (1-s^{16})$$

$$۲۶- (1-s^2)(1-s^4)(1-s^8) = (1-s^{16})$$

$$۲۷- (1-s^2)(1-s^4)(1-s^8) = (1-s^{16})$$

۲۸ اجزائے ضربی تک = ۲۸

$$۲۸ - \text{لا} - \text{ما} = (\text{لا} - \text{ما}) (\text{سہ لا} - \text{سہ ما}) (\text{سہ لا} - \text{سہ ما})$$

$$۲۹ - (\text{لا} + \text{ما}) + (\text{سہ لا} + \text{سہ ما}) + (\text{سہ لا} + \text{سہ ما}) = ۶ \text{ لا ما}$$

$$۳۰ - (\text{ثابت کرو کہ لا} + \text{ما} + \text{ی} - ۳ \text{ لا ما ی})$$

$$= (\text{لا} + \text{ما} + \text{ی}) (\text{لا} + \text{سہ ما} + \text{سہ ی}) (\text{لا} + \text{سہ ما} + \text{سہ ی})$$

$$۳۱ - \text{اگر لا} = ۱ + \text{ب}، \text{ما} = ۱ + \text{سہ ب}، \text{ی} = ۱ + \text{سہ ب} + \text{سہ ب}$$

تو ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ لا ما ی} = ۱ + ۳$$

$$(۲) \text{ لا} + \text{ما} + \text{ی} = ۱ + ۳$$

$$(۳) \text{ لا} + \text{ما} + \text{ی} = ۳ (۱ + ۳)$$

$$۳۲ - \text{اگر لا} + \text{ج} + \text{ما} + \text{بی} = \text{لا} + \text{ج} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ری} = \text{ما}$$

$$\text{اور ب لا} + \text{ما} + \text{ج ی} = \text{ے}$$

تو ثابت کرو کہ

$$(\text{لا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{ب ج} - \text{ج لا} - \text{ب ما} - \text{ما ی} - \text{ی لا} - \text{لا ما})$$

$$= \text{لا} + \text{ما} + \text{ے} - \text{ما ے} - \text{لا ے} - \text{لا ما}$$

$$۳۳ - \text{اگر لا} = ۱ + \text{ج} + \text{ما} + \text{بی}، \text{ما} = ۱ + \text{ج} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ری}$$

$$\text{ے} = \text{ب لا} + \text{ما} + \text{ج ی}$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ لا} + \text{ما} + \text{ے} - ۳ \text{ لا ما ے}$$

$$= (\text{لا} + \text{ب} + \text{ج} - ۳ \text{ ب ج}) (\text{لا} + \text{ما} + \text{ی} - ۳ \text{ لا ما ی})$$

باب

مسائل مساوات درجہ دوم

۱۰۵۔ مساوات درجہ دوم وہ مساوات ہے جس میں تحول اور اختصار کے بعد مقدار مچھول کی سب سے اعلیٰ قوت دو ہو، مساوات درجہ دوم کی صورت عامہ یہ ہے۔

$$x^2 + bx + c = 0$$

اس میں مقادیر x ، b ، c معلوم ہیں اور ان کی رقوم میں مقدار مچھول x کی قیمت یا قیمتیں دریافت کی جاتی ہیں، عددی سر b اور c میں سے ایک یا دونوں صفر کے برابر ہو سکتے ہیں مگر بالعموم مساوات کا درجہ کم کیے بغیر ہم x کو صفر کے برابر نہیں فرض کر سکتے۔

۱۰۶۔ مساوات درجہ دوم کی دو سے زیادہ اصلیں نہیں ہو سکتیں اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ مساوات $x^2 + bx + c = 0$ کی تین اصلیں x_1 ، x_2 ، x_3 ہیں اب چونکہ ان میں سے ہر ایک اصل دی ہوئی مساوات کو پورا کرتی ہے اس لیے

$$x_1^2 + bx_1 + c = 0 \dots\dots\dots (۱)$$

$$x_2^2 + bx_2 + c = 0 \dots\dots\dots (۲)$$

$$x_3^2 + bx_3 + c = 0 \dots\dots\dots (۳)$$

مساوات (۲) کو (۱) سے تفریق کرو تو حاصل ہوگا۔

$$۱) (عہ - ہ) + ب = (ہ - عہ) = ۰$$

اب چونکہ عہ - ہ صفر کے برابر نہیں ہے کیونکہ مساوات کی صلیبیں سب مختلف فرض کی گئی ہیں اس لیے ہر ایک رقم کو عہ - ہ پر تقسیم کرنے سے

$$۱) (عہ + ہ) + ب = ۰ \dots \dots \dots (۴)$$

اسی طرح مساوات (۲) اور (۳) سے حاصل ہوگا۔

$$۱) (ہ + ج) + ب = ۰ \dots \dots \dots (۵)$$

$$۱) (عہ - ج) = ۰ \dots \dots \dots (۶)$$

اور یہ ناممکن ہے کیونکہ ۱ صفر کے برابر نہیں ہے اور جیسا ہم نے ابتدا میں فرض کیا عہ اور ج غیر مساوی ہیں پس ثابت ہوا کہ مساوات درجہ دوم کی تین مختلف صلیبیں نہیں ہو سکتیں۔

۱۰۶۔ بیشتر اس کے کہ ہم مساوات درجہ دوم کی صورت عامہ کا جبر یہ حل دریافت کریں ہم اس کی مفصلہ ذیل خاص صورتوں پر غور کریں گے۔

(۱) فرض کرو کہ ج = ۰ تو مساوات ۱ لا + ب لا + ج = ۰ کی مختصر صورت ہوگی۔

$$۱) لا + ب لا = ۰$$

$$۱) لا (لا + \frac{ب}{لا}) = ۰$$

اب چونکہ ۱ صفر کے برابر نہیں ہے اس لیے لا = ۰ یا لا = - \frac{ب}{لا}

پس مساوات مفروضہ کی دو صلیبیں صفر اور - \frac{ب}{لا} ہیں

(۲) فرض کرو کہ ب = ۰ اور ج = ۰

مساوات کی صورت عامہ اور بھی مختصر ہوگئی یعنی لا × لا = ۰

اب چونکہ ۱ صفر کے برابر نہیں ہے اس لیے لا = ۰ یا لا = ۰

اس لیے مساوات کی اصلیں ہوں گی $لا = ۰$ اور $لا = ۰$ ۔
 اس صورت میں اصلیں برابر ہیں اور ہم کہہ سکتے ہیں کہ مساوات کی
 صرف ایک ہی اصل ہے۔ مگر اپنے نتائج کی صداقت عامہ کو قائم رکھنے
 کے لیے یہ کہنا زیادہ مناسب ہوگا کہ مساوات کی دو مساوی
 اصلیں ہیں۔

(۳) فرض کرو کہ $ب = ۰$ ۔

تب $لا + لا = ج$ ۔

$$\text{یعنی } لا + لا = ج \quad (لا - لا) = ج \quad = ۰$$

چونکہ ۱ صفر کے برابر نہیں ہے اس لیے $لا = ۰$ اور $لا = ۰$ ۔
 مطلوبہ اصلیں ہیں اس جگہ اصلیں مساوی مگر مختلف العلامت ہیں اگر
 $\frac{ج}{لا}$ منفی مقدار ہو تو دونوں اصلیں حقیقی ہونگی اگر $\frac{ج}{لا}$ مثبت
 مقدار ہو تو دونوں اصلیں خیالی ہونگی اور اس حالت میں ہم انہیں
 اس طرح بھی لکھ سکیں گے۔

$$لا = -خ \quad اور \quad لا = +خ \quad \frac{ج}{لا}$$

۱۰۸۔ مساوات درجہ دوم کی صورت عامہ کا حل اس حالت میں
 جبکہ ۱ صفر کے برابر نہ ہو مختلف طریقوں سے حاصل ہو سکتا ہے لیکن
 ہم اس جگہ "تکمیل مربع" کے طریقہ کو اختیار کریں گے۔

$$لا + لا + ب = ج$$

ارقام مساوات کو ۱ پر تقسیم کرنے سے

$$لا + لا + \frac{ب}{لا} = \frac{ج}{لا}$$

$$\text{علی نقل سے } لا^2 + \frac{ب}{۲} - \frac{ج}{۲} = لا - \frac{ج}{۲}$$

طرفین میں $(\frac{ب}{۲} - \frac{ج}{۲})$ جمع کرنے سے

$$لا^2 + \frac{ب}{۲} - \frac{ج}{۲} = لا - \frac{ج}{۲} + (\frac{ب}{۲} - \frac{ج}{۲})$$

دائیں طرف کا جملہ مربع کامل ہے یعنی $(لا + \frac{ب}{۲} - \frac{ج}{۲})$ کے برابر ہے

$$\text{اس لیے } (لا + \frac{ب}{۲} - \frac{ج}{۲})^2 = \frac{ب^2 - ۴ج}{۴}$$

$$\text{طرفین کا جذر لینے سے } لا + \frac{ب}{۲} - \frac{ج}{۲} = \pm \sqrt{\frac{ب^2 - ۴ج}{۴}}$$

$$\therefore لا = \frac{ب^2 - ۴ج}{۴} \pm \sqrt{\frac{ب^2 - ۴ج}{۴}}$$

۱۰۹۔ اگر مساوات کی مذکورہ بالا اسیلیں عہ اور بہ سے تعبیر کی جائیں تو

$$\text{عہ} = \frac{ب + ب^2 - ۴ج}{۴} \text{ اور بہ} = \frac{ب - ب^2 - ۴ج}{۴}$$

ظاہر ہے کہ

(۱) اگر $ب^2 - ۴ج$ (مقدار جو علامت جذر کے اندر ہے) مثبت ہو تو عہ اور بہ حقیقی اور غیر مساوی ہوں گی۔

(۲) اگر $ب^2 - ۴ج = ۰$ تو عہ اور بہ حقیقی اور مساوی ہوں گی۔

(۳) اگر $ب^2 - ۴ج$ (منفی) ہو تو عہ اور بہ خیالی اور غیر مساوی ہوں گی۔

(۴) اگر $ب^2 - ۴ج$ مربع کامل ہو تو عہ اور بہ تامطوق اور غیر مساوی ہوں گی صرف ان نتائج کی استعانت سے ہم مساوات کو

حل کیے بغیر اس کی اصلوں کی نوعیت دریافت کر سکتے ہیں۔
نوٹ:- چونکہ ہم بے ۲- ۴ ارج کی قیمت کی مدد سے مساوات کی
اصلوں کی نوعیت معلوم کر سکتے ہیں اس لیے بے ۲- ۴ ارج کو مساوات کا
میزر کہتے ہیں۔

مثال ۱- ثابت کرو کہ لا کی کوئی حقیقی قیمت مساوات

$$۲ - لا - ۶ لا + ۷ = ۰ \text{ کو پورا نہیں کر سکتی۔}$$

$$\text{یہاں } ۱ = ۲ - ۶ = ۴ - ۶ = ۷$$

$$\therefore \text{بے } ۲ - ۴ ارج = (۶ - ۲) - (۲ \times ۲ \times ۲) = ۲۰ -$$

پس معلوم ہوا کہ مساوات کی اصلیں خیالی ہیں۔

مثال ۲- اگر مساوات لا + ۲ (ک + ۲) لا + ۹ ک = ۰ کی اصلیں

مساوی ہوں تو ک کی قیمت دریافت کرو۔

اصلوں کے مساوی ہونے کی شرط یہ ہے کہ (ک + ۲) = ۹ ک
یعنی ک = ۵ - ۴

$$\text{یا } (ک - ۴) (ک - ۱) = ۰ \therefore ک = ۴ \text{ یا } ک = ۱$$

مثال ۳- ثابت کرو کہ مساوات

$$لا - ۲ ف + لا + ف - ق + ۲ ق - ر - ۲ ر = ۰ \text{ کی اصلیں ناطق ہیں۔}$$

اصلیں ناطق ہونگی اگر میسر یعنی (۲ - ف) = ۲ (ف - ق + ۲ ق - ر - ۲ ر)

$$\text{مربع کامل ہو۔ میسر } ۴ (ق - ۲ ق + ۲ ق + ر - ۲ ر) = ۴ (ق - ر)$$

پس معلوم ہوا کہ اصلیں ناطق ہیں۔

$$\text{۱۱۰۔ چونکہ } \frac{۲ - ۶ + ۷ - ۲}{۱۲} = ۰$$

$$\text{اور } \frac{۲ - ۶ + ۷ - ۲}{۱۲} = ۰$$

جمع کرنے سے

$$\frac{ع + ب = -ب + \sqrt{ب^2 - ۴ج}}{۲} = \frac{ب - \sqrt{ب^2 - ۴ج}}{۲}$$

$$= \frac{ب^2}{۲} - \frac{ب}{۲} \dots \dots \dots (۱)$$

ضرب دینے سے

$$\frac{ع + ب = -ب + \sqrt{ب^2 - ۴ج}}{۲} = \frac{ب - \sqrt{ب^2 - ۴ج}}{۲}$$

$$(۲) \dots \dots \dots \frac{ج}{۱} = \frac{۴ج}{۲} = \frac{(-ب - \sqrt{ب^2 - ۴ج})}{۲}$$

اگر مساوات کو صورت $\frac{ب}{۲} + \frac{ج}{۲} =$ میں لکھا جائے تو ان نتائج کو ہم اس طرح بیان کر سکتے ہیں اگر کسی مساوات درجہ دوم میں درجہ دوم کی رقم کا سر ایک ہو تو

(۱) اس کی اصلوں کا مجموعہ لا کے سر کی علامت بدلنے سے حاصل ہوتا ہے۔

(۲) اس کی اصلوں کا حاصل ضرب برابر ہوگا رقم مطلق کے۔
نوٹ۔ مساوات کی اس رقم کو جس میں مقدار مجہول شامل نہ ہو رقم مطلق کہتے ہیں۔

۱۱۔ چونکہ $\frac{ب}{۲} = ع + ب$ اور $\frac{ج}{۲} = ع ب$

مساوات $\frac{ب}{۲} + \frac{ج}{۲} =$ صورت ذیل میں لکھی جاسکتی ہے۔

لا۔ $(ع + ب) + لا + ع ب =$

(۱) معلوم ہوا کہ ہر ایک مساوات درجہ دوم اس صورت میں بھی لکھی جاسکتی ہے۔

لا۔ $(اصلوں کا مجموعہ) + لا + اصلوں کا حاصل ضرب =$

(۲)

مثال ۲۔ ایک مساوات کی صلیں $۲ + ۳۶$ اور $۲ - ۳۶$ ہیں تو اس کو دریافت کرو۔

∴ قاعدہ (۲) کی استعانت سے مساوات ہوگی $لا - ہم لا + ۱ = ۰$

۱۱۲۔ دفعہ سابق کی مثال (۱) کے حل کے طریقہ کے مثل طریقہ کی مدد سے ہم ایک ایسی مساوات مرتب کر سکتے ہیں جس کی تین یا زیادہ اصلیں دی ہوئی ہوں۔

مثال ۱۔ ایک مساوات کی سہیلیں ۲، ۳، ۴ ہیں تو اُسے دریافت کرو۔

درمیان کرو۔
معاذلات قبیل میں سے ہر ایک مساوات مطلوبہ کی شرائط کو پورا کرتی ہے۔

اس لیے مساوات مطلوب ہوگی $(x-1)(x+1)(x-2) = \left(\frac{x}{2} - 1\right)$

$$= r^2 + v^2 - \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{2} v^2$$

مثال ۲۔ ایسی مساوات مرتب کر جس کی جہلیں؛ ± 1 ، ± 2 ، ± 3 ، ± 4 ، ± 5 ، ± 6 ، ± 7 ، ± 8 ، ± 9 ، ± 10 ، ± 11 ، ± 12 ، ± 13 ، ± 14 ، ± 15 ، ± 16 ، ± 17 ، ± 18 ، ± 19 ، ± 20 ، ± 21 ، ± 22 ، ± 23 ، ± 24 ، ± 25 ، ± 26 ، ± 27 ، ± 28 ، ± 29 ، ± 30 ، ± 31 ، ± 32 ، ± 33 ، ± 34 ، ± 35 ، ± 36 ، ± 37 ، ± 38 ، ± 39 ، ± 40 ، ± 41 ، ± 42 ، ± 43 ، ± 44 ، ± 45 ، ± 46 ، ± 47 ، ± 48 ، ± 49 ، ± 50 ، ± 51 ، ± 52 ، ± 53 ، ± 54 ، ± 55 ، ± 56 ، ± 57 ، ± 58 ، ± 59 ، ± 60 ، ± 61 ، ± 62 ، ± 63 ، ± 64 ، ± 65 ، ± 66 ، ± 67 ، ± 68 ، ± 69 ، ± 70 ، ± 71 ، ± 72 ، ± 73 ، ± 74 ، ± 75 ، ± 76 ، ± 77 ، ± 78 ، ± 79 ، ± 80 ، ± 81 ، ± 82 ، ± 83 ، ± 84 ، ± 85 ، ± 86 ، ± 87 ، ± 88 ، ± 89 ، ± 90 ، ± 91 ، ± 92 ، ± 93 ، ± 94 ، ± 95 ، ± 96 ، ± 97 ، ± 98 ، ± 99 ، ± 100 ، ± 101 ، ± 102 ، ± 103 ، ± 104 ، ± 105 ، ± 106 ، ± 107 ، ± 108 ، ± 109 ، ± 110 ، ± 111 ، ± 112 ، ± 113 ، ± 114 ، ± 115 ، ± 116 ، ± 117 ، ± 118 ، ± 119 ، ± 120 ، ± 121 ، ± 122 ، ± 123 ، ± 124 ، ± 125 ، ± 126 ، ± 127 ، ± 128 ، ± 129 ، ± 130 ، ± 131 ، ± 132 ، ± 133 ، ± 134 ، ± 135 ، ± 136 ، ± 137 ، ± 138 ، ± 139 ، ± 140 ، ± 141 ، ± 142 ، ± 143 ، ± 144 ، ± 145 ، ± 146 ، ± 147 ، ± 148 ، ± 149 ، ± 150 ، ± 151 ، ± 152 ، ± 153 ، ± 154 ، ± 155 ، ± 156 ، ± 157 ، ± 158 ، ± 159 ، ± 160 ، ± 161 ، ± 162 ، ± 163 ، ± 164 ، ± 165 ، ± 166 ، ± 167 ، ± 168 ، ± 169 ، ± 170 ، ± 171 ، ± 172 ، ± 173 ، ± 174 ، ± 175 ، ± 176 ، ± 177 ، ± 178 ، ± 179 ، ± 180 ، ± 181 ، ± 182 ، ± 183 ، ± 184 ، ± 185 ، ± 186 ، ± 187 ، ± 188 ، ± 189 ، ± 190 ، ± 191 ، ± 192 ، ± 193 ، ± 194 ، ± 195 ، ± 196 ، ± 197 ، ± 198 ، ± 199 ، ± 200 ، ± 201 ، ± 202 ، ± 203 ، ± 204 ، ± 205 ، ± 206 ، ± 207 ، ± 208 ، ± 209 ، ± 210 ، ± 211 ، ± 212 ، ± 213 ، ± 214 ، ± 215 ، ± 216 ، ± 217 ، ± 218 ، ± 219 ، ± 220 ، ± 221 ، ± 222 ، ± 223 ، ± 224 ، ± 225 ، ± 226 ، ± 227 ، ± 228 ، ± 229 ، ± 230 ، ± 231 ، ± 232 ، ± 233 ، ± 234 ، ± 235 ، ± 236 ، ± 237 ، ± 238 ، ± 239 ، ± 240 ، ± 241 ، ± 242 ، ± 243 ، ± 244 ، ± 245 ، ± 246 ، ± 247 ، ± 248 ، ± 249 ، ± 250 ، ± 251 ، ± 252 ، ± 253 ، ± 254 ، ± 255 ، ± 256 ، ± 257 ، ± 258 ، ± 259 ، ± 260 ، ± 261 ، ± 262 ، ± 263 ، ± 264 ، ± 265 ، ± 266 ، ± 267 ، ± 268 ، ± 269 ، ± 270 ، ± 271 ، ± 272 ، ± 273 ، ± 274 ، ± 275 ، ± 276 ، ± 277 ، ± 278 ، ± 279 ، ± 280 ، ± 281 ، ± 282 ، ± 283 ، ± 284 ، ± 285 ، ± 286 ، ± 287 ، ± 288 ، ± 289 ، ± 290 ، ± 291 ، ± 292 ، ± 293 ، ± 294 ، ± 295 ، ± 296 ، ± 297 ، ± 298 ، ± 299 ، ± 300 ، ± 301 ، ± 302 ، ± 303 ، ± 304 ، ± 305 ، ± 306 ، ± 307 ، ± 308 ، ± 309 ، ± 310 ، ± 311 ، ± 312 ، ± 313 ، ± 314 ، ± 315 ، ± 316 ، ± 317 ، ± 318 ، ± 319 ، ± 320 ، ± 321 ، ± 322 ، ± 323 ، ± 324 ، ± 325 ، ± 326 ، ± 327 ، ± 328 ، ± 329 ، ± 330 ، ± 331 ، ± 332 ، ± 333 ، ± 334 ، ± 335 ، ± 336 ، ± 337 ، ± 338 ، ± 339 ، ± 340 ، ± 341 ، ± 342 ، ± 343 ، ± 344 ، ± 345 ، ± 346 ، ± 347 ، ± 348 ، ± 3

اس لیے مساوات ہوئی لا (لا + و) (لا - و) (لا - ج) = .
یعنی لا (لا - و) (پ لا - ج) = .
یا پ لا - ج لا - و پ لا + و ج لا = .

۱۱۳۔ نتائج دفعہ ۱۱۰ نہایت ضروری ہیں اور مساوات درجہ دوم

کی اصلوں کے متعلق جو بھی سوالات ہوں اُن کو حل کرنے کے لیے عام طور پر کافی ثابت ہوتے ہیں۔ ایسے سوالات میں ہمیں مساوات کی اصلوں پر علیحدہ علیحدہ غور نہیں کرنا چاہیے۔ لیکن ان کے حاصل جمع اور حاصل ضرب کو مساوات کے سرور کی رقوم میں لکھنے سے جو ارتباطات حاصل ہوں ان کو استعمال کرنا چاہیے۔

مثال ۱۔ اگر $ا$ اور $ب$ مساوات لاء $ف + لا + ق =$ کی اصلیں ہوں تو
 (۱) $ا + ب$ (۲) $ا + ب$ کی اصلیں دریافت کرو۔
 یہاں $ا + ب = ف$ اور $ا + ب = ق$

$\dot{u} + \dot{b} = (u + b) - 2 = f - 2 = c$
 $\dot{u} + \dot{b} = (u + b)(\dot{u} + \dot{b} - 2) = f$
 $= f - \{ (u + b) - 3 \}$
 $= f - (f - 3) = 3$

مثال ۲۔ اگر 1 اور p مساوات $l + a + m + n = 0$ کی صلیب ہوں

تو ایسی مساوات دریافت کرو جس کی صلیبیں $\frac{1}{p}$ اور $\frac{1}{q}$ ہوں۔ عملوں کا

$$\frac{r + r^2}{r} = \frac{r}{r} + \frac{r^2}{r} = \text{مطلوبہ}$$

$$\text{اصلوں کا حاصل ضرب} = \frac{1}{ب} \times \frac{1}{ر} = ۱$$

اس لیے دفعہ ۱۱ کے بموجب مساوات مطلوبہ ہے

$$لا - \left(\frac{لا + ب}{ب} \right) = ۱ + لا$$

$$\text{یا } لا - (لا + ب) = ب + لا$$

ہم مثال بالا کے طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں۔

$$لا + ب = \frac{لا^۲ - ب^۲}{لا - ب} \text{ اور } لا + ب = \frac{لا^۲ - ب^۲}{لا - ب}$$

$$\text{اس لیے مساوات مطلوبہ ہے } لا - \frac{لا^۲ - ب^۲}{لا - ب} = لا + \frac{لا^۲ - ب^۲}{لا - ب}$$

$$\text{یا } لا - (لا - ب) = لا + (لا - ب)$$

$$\text{مثال ۳۔ اگر } لا = \frac{۱۵ - ۱}{۲} \text{ تو } لا + ب = لا - ب = ۲ + لا = ۲ + \frac{۱۵ - ۱}{۲} \text{ کی قیمت}$$

دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اس قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوگی اگر ہم لا کی بجائے جملہ مجوزہ میں $\frac{۱۵ - ۱}{۲}$ لکھ دیں۔

سب سے پہلے ایک ایسی مساوات معلوم کر جس کی اصلیں $\frac{۱۵ \pm ۱}{۲}$ ہوں

$$\text{ہوں اصلوں کا مجموعہ} = ۳ \text{ اور قیمتوں کا حاصل ضرب} = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{اس لیے مساوات ہوئی } لا - ب = لا + ب = ۱$$

$$\text{پس } لا - ب = لا + ب = ۱ \text{ ایک ایسا جملہ درجہ دوم ہے جو } \frac{۱۵ \pm ۱}{۲} \text{ میں}$$

سے ہر ایک قیمت کے لیے ناپید ہوتا ہے۔

$$اب ۲ لا ۲ + لا ۲ - لا ۲ = لا ۲ + لا ۲ - لا ۲ (۱۴ + لا ۲)$$

$$۲ + (۱۴ + لا ۲ - لا ۲) ۲ = لا ۲ + ۰ \times ۲ + ۰ \times ۲ = ۲ = ۲$$

صورت مفروضہ میں جملہ کی عددی قیمت ہے۔

۱۱۴۔ کن شرائط کے تحت مساوات ۱ لا ۲ + پ لا + ج = ۰ کی

اصلیں (۱) مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف (۲) ایک دوسرے کی مقلوب ہونگی؟

اصلیں مقدار میں برابر اور علامت میں مختلف ہونگی اگر ان کا حاصل جمع

صفر ہو اس لیے شرط مطلوبہ ہے۔ $\frac{ب}{ا} = ۰$ یعنی $ب = ۰$ اگر اصلیں

ایک دوسری کی متکافی ہوں تو ان کا حاصل ضرب ایک ہوگا۔

$$اس لیے \frac{ج}{ا} = ۱ \text{ یعنی } ج = ا$$

نتیجہ اول ہندسہ تجلیلی میں اکثر استعمال ہوتا ہے اور نتیجہ دوم ایک ایسی شرط عامہ کی خاص صورت ہے جو ہر ایک درجہ کی مساوات کے لیے درست ہے۔

مثال ۱۔ کن شرائط کے پورا ہونے پر مساوات ۱ لا ۲ + پ لا + ج = ۰

کی اصلیں (۱) دونوں مثبت ہونگی (۲) علامت میں مختلف ہونگی مگر ان میں سے بڑی منفی ہوگی۔

اگر دی ہوئی مساوات کی اصلیں عہ اور ب ہوں تو

$$عہ + ب = - \frac{ب}{ا}$$

$$عہ ب = \frac{ج}{ا}$$

(۱) اگر دونوں اصلیں مثبت ہوں تو حاصل ضرب عہ ب مثبت ہوگا اور

اس لیے ج کی وہی علامت ہوگی جو ا کی۔

نیز چونکہ $ع + ب$ مثبت ہے اس لیے $\frac{ب}{ع}$ منفی ہے اس لیے $ب$ اور $ع$ کی علامات مختلف ہیں۔

پس معلوم ہوا کہ شرط مطلوبہ یہ ہے کہ $ع$ اور $ج$ کی علامتیں متشابہ مگر $ب$ کی علامت سے مختلف ہوں۔

(۲) اگر اصلیں علامت میں مختلف ہوں تو حاصل ضرب $ع + ب$ منفی ہوگا اور اس لیے $ج$ کی علامت $ع$ سے مختلف ہوگی۔

نیز $ع + ب$ کی وہی علامت ہے جو مساوات کی بڑی قیمت کی اور یہ قیمت منفی ہے اس لیے $\frac{ب}{ع}$ مثبت ہے اس لیے $ع$ اور $ب$ کی

علامت متشابہ ہیں۔

اس لیے شرط مطلوبہ یہ ہے کہ $ع$ اور $ب$ کی علامتیں متشابہ مگر $ج$ کی علامت سے مختلف ہوں۔

مثال ۲۔ کن شرائط کے تحت مساوات $ع + ب + لا + ج = ۰$ کی (۱) ایک اصل صفر ہوگی (۲) دونوں اصلیں صفر ہوں گی (۳) ایک اصل لامتناہی ہوگی (۴) دونوں اصلیں لامتناہی ہوں گی؟

$$ع + ب = ۰ \Rightarrow \frac{ب}{ع} = - \dots (۱)$$

$$ع \times ب = ۰ \Rightarrow \frac{ج}{ع} = ۰ \dots (۲)$$

صورت اول۔ اگر ایک اصل صفر ہو تو $ع \times ب = ۰ \Rightarrow \frac{ج}{ع} = ۰$

جس سے معلوم ہوا کہ $ج = ۰$

صورت دوم۔ اگر دونوں اصلیں صفر ہوں تو

$$ع + ب = ۰ \Rightarrow \frac{ب}{ع} = -$$

یعنی $ب = ۰$ اور $عہ بہ = \frac{ج}{۱} = ۰$ یعنی $ج = ۰$.

پس اس صورت میں $ب = ۰$ و $ج = ۰$.

اگر مساوات کی کوئی اصل صفر نہ ہو تو لا پر تقسیم کرنے سے ہم اس شکل کو ذیل میں لکھ سکتے ہیں۔

$$۱ + ب + \frac{۱}{۱} + ج = ۰$$

فرض کرو کہ $\frac{۱}{۱} = م$ تب

$$ج + م + ب + ۱ = ۰ \dots \dots \dots (۲)$$

اس مساوات کی اصلیں $\frac{۱}{۱}$ اور $\frac{۱}{۱}$ ہیں۔

صورت سوم۔ اگر $عہ لا$ انتہا بڑا ہو تو $\frac{۱}{۱}$ لا انتہا چھوٹا ہوگا۔ یعنی مساوات (۳) کی ایک اصل صفر ہوگی اور اس کے لیے ضروری ہے کہ $۱ = ۰$ ۔
بموجب صورت اول۔

صورت چہارم۔ اگر $عہ اور بہ$ دونوں لا انتہا بڑے ہوں تو $\frac{۱}{۱}$ اور $\frac{۱}{۱}$ لا انتہا چھوٹے ہونگے یعنی اس صورت میں مساوات (۳) کی دونوں اصلیں صفر ہونگی اس لیے ضروری ہے کہ $۱ = ب = ۰$ ، بموجب صورت دوم۔

پس ثابت ہوا کہ مساوات $۱ + ب + لا + ج = ۰$ کی ایک اصل لا انتہا بڑی ہوگی اگر لا کا سر صفر ہو اور دونوں اصلیں لا انتہا بڑی ہونگی اگر لا اور لا دونوں کے سر صفر ہوں۔

مشکل نمبری ۹

جن مساواتوں کی اصلیں حسب ذیل ہیں انہیں مرتب کرو۔

$$۱ - \frac{۳}{۵} - \frac{۳}{۴} \quad ۲ - \frac{۴}{۵} - \frac{۳}{۴}$$

$$۳- \frac{ف-ق}{ف+ق} ، \frac{ف+ق}{ف-ق} \quad ۴- ف \pm ۲ \sqrt{۲ق}$$

$$۵- ۳ \pm ۵ \sqrt{۱} \quad ۶- ۱ \pm ۱ \sqrt{۱}$$

$$۷- ۲ \pm ۳ \sqrt{۳}$$

$$۸- \frac{۱}{۲} ، \frac{۱}{۲} ، \frac{۲}{۱}$$

۹- ثابت کرو کہ مساوات ذیل کی اصلیں حقیقی ہیں۔

$$(۱) لا - ۲ \sqrt{۱} + لا - لا - لا - ج = ۰$$

$$(۲) (۱ - ب + ج) لا + ۴(۱ - ب) لا - (۱ - ب - ج) = ۰$$

$$۱۰- ثابت کرو کہ مساوات لا + ۲(ف + ق) لا + ۲(ف + ق) = ۰ کی$$

اصلیں خیالی ہیں۔

$$۱۱- ثابت کرو کہ مساوات {ج - ۲ب + ج + ب} لا$$

$$- ۲{ج - (۱ + ب) + ج + ب} لا + {۲ - ۲(۱ + ب + ج) + ۱ + ب + ج} = ۰$$

کی اصلیں خیالی ہیں۔

$$۱۲- ثابت کرو کہ مساوات (لا - ب) (لا - ج) + (لا - ج) (لا - ۱)$$

$$+ (لا - ۱) (لا - ب) = ۰ کی اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہیں جب تک کہ لا - ب ج$$

ایک دوسرے کے برابر نہ ہوں۔

$$۱۳- اگر مساوات لا - ۱۵ - م (۲ - لا - ۸) = ۰ کی اصلیں مساوی ہوں تو م کی$$

قیمتیں دریافت کرو۔

$$۱۴- م کی کس قیمت کے لیے مساوات لا - لا - ب لا = \frac{۱-۲}{۱+۲} کی اصلیں$$

مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہونگی؟

۱۵- ثابت کرو کہ مساوات ذیل کی اصلیں ناطق ہیں:

$$(۱) (۱ + ج - ب) لا + ۲ج لا + (ب + ج - ۱) = ۰$$

$$(۲) ۱ب ج لا + ۳ج لا + ب ج لا - ۱ - ۱ب + ۲ب = ۰$$

اگر عہ اور ب مساوات ۱ لا + ب لا + ج = ۰ کی اصلیں ہوں تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

$$۱۶ - \frac{۱}{عہ} + \frac{۱}{بہ} - ۱۶ = عہ بہ + عہ بہ$$

$$۱۸ - \left(\frac{عہ}{بہ} - \frac{بہ}{عہ} \right)$$

ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

$$۱۹ - لا + لا - لا + لا = ۲۲ جب کہ لا = ۱۲ - ۱$$

$$۲۰ - لا - لا - لا + لا = ۱۵ جب کہ لا = ۳ - ۱$$

$$۲۱ - لا - لا + لا + لا + لا = ۲ جب کہ لا = ۱ - ۱$$

۲۲ - اگر عہ اور ب مساوات لا + ف لا + ق = ۰ کی اصلیں ہوں تو ایسی مساوات مرتب کرو جس کی اصلیں (عہ - بہ) اور (عہ + بہ) ہوں۔

۲۳ - ثابت کرو کہ مساوات (لا - ۱) (لا - ب) = عہ کی اصلیں ہمیشہ حقیقی ہوں گی۔

۲۴ - اگر لا، لا، لا مساوات لا + ب لا + ج = ۰ کی اصلیں ہوں تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

$$(۱) (لا + ب) + (لا + ب) + (لا + ب)$$

$$(۲) (لا + ب) + (لا + ب) + (لا + ب)$$

۲۵ - اگر مساوات لا + ب لا + ج = ۰ کی ایک اصل دوسری کی ن گنی ہو تو لا، ب اور ج کا باہمی ربط دریافت کرو۔

۲۶ - ایک ایسی مساوات دریافت کرو جس کی اصلیں مساوات لا + ۲ (م + ن) لا + م + ن = ۰ کی اصلوں کے حاصل جمع اور حاصل تفریق کے مربعوں کے برابر ہوں۔

۲۷ - مساوات لا + ب لا + ج = ۰ کی اصلیں عہ اور بہ ہیں

ایک ایسی مساوات بناؤ جس کی اصلیں $ع^۲ + ب^۲$ اور $ع^۲ + ب^۲ - ۲$ ہوں
 ۲۸۔ مساوات $ف لا + ق لا + ر =$ کی اصلوں کی علامات پر بحث کرو۔
 ۱۱۵۔ مثال ذیل سے نتائج دفعہ ۱۱۳ کے استعمال کی توضیح ہوگی۔

مثال۔ اگر لاکوئی مقدار حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ جملہ $لا^۲ + ۲ لا - ۱۱$ تمام

عددی قیمتیں اختیار کر سکتا ہے سوائے ان قیمتوں کے جو ۲ اور ۶ کے درمیان واقع ہوں۔
 فرض کرو کہ

$$\frac{لا^۲ + ۲ لا - ۱۱}{۲(لا - ۳)} = م$$

ضرب دینے سے $لا^۲ + ۲ لا(۱ - م) + ۴ - ۱۱ = ۰$ ۔
 یہ ایک درجہ دوم کی مساوات ہے اور اگر لاکوئی قیمتیں حقیقی ہوں
 تو ضروری ہے کہ $م(۱ - م)$ $۴ - ۱۱$ مثبت ہو یا $م$ پر تقسیم کرنے
 اور اختصار کے بعد ضروری ہے کہ $م$ $۱۲ + ۸$ مثبت ہو یعنی
 $(۶ - م)(۲ - م)$ مثبت ہو۔

پس معلوم ہوا کہ اس حاصل ضرب کے دونوں اجزائے ضربی
 مثبت ہونے چاہئیں یا دونوں منفی۔ پہلی صورت میں $م$ کے ۶ اور
 دوسری صورت میں $م > ۱۲$ اس لیے ثابت ہوا کہ $م$ کی قیمت ۲ اور
 ۶ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتی مگر سوائے اس کے مابقی دیا ہوا
 جملہ باقی تمام عددی قیمتیں اختیار کر سکتا ہے۔

اس مثال میں یہ بات قابل غور ہے کہ جملہ درجہ دوم $م$ $۱۲ + ۸$
 کی قیمت مثبت ہے جب تک کہ $م$ کی قیمت مساوات درجہ دوم
 $م$ $۱۲ + ۸ =$ کی اصلوں کے درمیان واقع نہ ہو۔ یہ ایک مسئلہ
 عامہ کی خاص صورت ہے اس کی تحقیق ہم دفعہ ذیل میں کریں گے۔
 ۱۱۶۔ لاکوئی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے جملہ $لا^۲ + ۲ لا + ج$ کی علامت

وہی ہوگی جو λ کی ہے سوائے اس صورت کے جبکہ مساوات $\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0$ کی اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں اور λ کی قیمت ان اصولوں کے درمیان واقع ہو۔

$$\text{جملہ } \lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0 \text{ کے } \lambda = \left\{ \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} \right\} \dots (1)$$

صورت اول - فرض کرو کہ $\beta^2 - 4\gamma > 0$ تب

$$\text{جملہ } \lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0 \text{ کے } \lambda = \left\{ \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} \right\}$$

فرض کرو کہ $\beta^2 - 4\gamma < 0$

اب اگر $\lambda < 0$ تو اجزاء کے ضربی λ - اور λ - بہ دونوں مثبت ہونگے اور اگر $\lambda > 0$ تو اجزاء کے ضربی λ - اور λ - بہ دونوں منفی ہونگے۔ پس ہر حالت میں جملہ $(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$ مثبت ہوگا اور $\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$ کی علامت وہی ہوگی جو λ کی۔

لیکن اگر λ کی قیمت β اور γ کے درمیان واقع ہو تو جملہ $(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$ کی علامت منفی ہوگی اور $\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$ کی علامت λ کی علامت سے مختلف ہوگی۔

صورت دوم - فرض کرو کہ $\beta^2 - 4\gamma = 0$ تو (1) سے ظاہر ہے کہ

$$لا + ب + لا = ج + \frac{ب}{\frac{لا}{2}}$$

اور چونکہ لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے $(لا + \frac{ب}{\frac{لا}{2}})$ مثبت ہے اس لیے ثابت ہوا کہ لا + ب + لا ج کی وہی علامت ہے جو لا کی ہے۔
صورت سوم - فرض کر کہ ب^۲ - ۴ لا ج > یعنی مساوات کی اصلیں
نحیانی ہیں۔

$$\text{جملہ } لا + ب + لا = ج + \frac{ب}{\frac{لا}{2}} - \frac{ب^2 - 4 لا ج}{\frac{لا}{2}} \text{ (موجب (۱))}$$

$$= \left\{ \frac{ب^2 - 4 لا ج}{\frac{لا}{2}} + \frac{ب}{\frac{لا}{2}} \right\} لا =$$

اب لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے جملہ $(لا + \frac{ب}{\frac{لا}{2}} + \frac{ب^2 - 4 لا ج}{\frac{لا}{2}})$ مثبت ہے کیونکہ وہ دو مثبت مقداروں کا مجموعہ ہے۔ اس لیے جملہ لا + ب + لا ج کی وہی علامت ہے جو لا کی ہے۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۱۱۶۔ دفعہ سابق سے ظاہر ہے کہ اگر ب^۲ - ۴ لا ج منفی ہو یا صفر کے برابر ہو تو جملہ لا + ب + لا ج کی ہمیشہ ایک ہی علامت رہے گی خواہ لا کوئی حقیقی قیمت اختیار کرے اور اگر یہ شرط پوری ہو تو جملہ مثبت ہوگا اگر لا مثبت ہو اور منفی ہوگا اگر لا منفی ہو۔

برعکس اس کے جملہ لا + ب + لا ج کے ہمیشہ مثبت ہونے کے لیے ضروری ہے کہ ب^۲ - ۴ لا ج منفی ہو یا صفر کے برابر ہو اور لا مثبت ہو۔ نیز لا + ب + لا ج کے ہمیشہ منفی ہونے کے لیے ضروری ہے کہ ب^۲ - ۴ لا ج منفی ہو یا صفر کے برابر ہو اور لا منفی ہو۔

مثال ۱۔ اگر لا متقدار حقیقی ہو تو ایسی حدود دریافت کرو جن کے

درمیان x کی قیمت کا واقع ہونا ضروری ہے تاکہ جملہ $\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 4x + 1}$ تمام قیمتیں اختیار کرنے کے قابل ہو سکے۔

$$\text{فرض کرو کہ } y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 4x + 1}$$

$$\text{تب } (x - 1)(y - 5) = (x - 1)(y - 1) + (x - 1)(y - 5) = 0$$

یہ لائن درجہ دوم کی مساوات ہے۔ چونکہ لا حقیقی ہے اس لیے ضروری ہے کہ

$$4 - 1 - 5 = -2 \text{ منفی نہ ہو۔}$$

یعنی $(x - 1)(y - 5) + 2 = 0$ منفی نہ ہو۔

اس لیے نتائج مندرجہ بالا کی استتانت سے ضروری ہے کہ

$$x^2 - 4x + 1 \geq 0 \text{ منفی ہو یا صفر ہو اور } x^2 - 4x + 5 \geq 0 \text{ مثبت ہو۔}$$

$$\text{اب } (x^2 - 4x + 1) - (x^2 - 4x + 5) = -4 \text{ منفی یا صفر ہوگا۔}$$

$$\text{اگر } x^2 - 4x + 1 \geq 0 \text{ اور } x^2 - 4x + 5 \geq 0 \text{ منفی یا صفر ہو۔}$$

$$\text{یعنی اگر } (x - 1)(x - 5) \geq 0 \text{ اور } (x - 1)(x - 5) \geq 0 \text{ منفی یا صفر ہو۔}$$

اور یہ جملہ منفی ہے جب تک کہ x کی قیمت ۲ اور ۱۲ کے درمیان واقع

ہے اور ایسی قیمتوں کے لیے ۲۰ - ۲۹ مثبت ہے۔

نیز جملہ مذکورہ اس وقت صفر ہوگا جب $x = 5$ یا $x = 12$ لیکن

جب $x = 5$ تو ۲۰ - ۲۹ منفی ہے۔ اس لیے x کی قیمتوں کی حدود ۲ اور

۱۲ ہیں اور ان کے درمیان اس کی کوئی قیمت ہو سکتی ہے۔

امثلہ نمبری ۹ ب

۱۔ ایسی حدود دریافت کرو جن کے درمیان x کا واقع ہونا ضروری ہے۔

تاکہ مساوات $x^2 - 4x + 1 = 0$ کی حقیقی اصلیں

ہو سکیں -

۲۔ اگر لا مقدار حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ جملہ $\frac{لا}{لا^۲ - ۵لا + ۹}$ کی قیمت ہمیشہ۱ اور $\frac{۱}{۱۱}$ کے درمیان واقع ہوگی -۳۔ ثابت کرو کہ لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے جملہ $\frac{لا^۲ - لا + ۱}{لا^۲ + لا + ۱}$ کی قیمت ۳ اور $\frac{۱}{۳}$ کے درمیان واقع ہوگی -۴۔ اگر لا حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ $\frac{لا^۲ + ۳لا - ۱}{لا^۲ + ۲لا - ۴}$ کی کوئی قیمت

۵ اور ۹ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتی -

۵۔ ایسی مساوات دریافت کرو جس کی اصلیں $\frac{لا}{لا^۲ \pm لا - ۱}$ ہوں -

۶۔ اگر عہ اور بہ مساوات لا۔ ف لا + ق = ۰ کی اصلیں ہوں تو

ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو -

$$(۱) \frac{عہ}{عہ} \left(\frac{عہ}{عہ} - \frac{بہ}{بہ} \right) + \frac{بہ}{بہ} \left(\frac{بہ}{بہ} - \frac{عہ}{عہ} \right) =$$

$$(۲) \frac{عہ}{عہ} (ف - ف) + \frac{بہ}{بہ} (ف - ف) =$$

۷۔ اگر ل لا + ن لا + ن = ۰ کی اصلوں کی باہمی نسبت ف : ق

ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ف}{ق} + \frac{ق}{ف} + \frac{ن}{ن} = ۰$$

۸۔ اگر لا حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ جملہ $\frac{(لا + م) م^۲ - م ن}{۲(لا - ن)}$ تمام قیمتیں اختیار

کرنے کی قابلیت رکھتا ہے سوائے اُن قیمتوں کے جو ۲ ن اور ۲ م کے درمیان واقع ہوں -

۹۔ اگر مساوات لا + ۲ ب لا + ج = ۰ کی اصلیں عہ اور بہ ہوں

اور مساوات $۱^۰$ لا + ۲ ب لا + ج = کی اصلیں $۱^۰$ + ۲ اور $۲^۰$ + ۱ ہوں
تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۱^۰ - ۲ج}{۲} = \frac{۲ - ۱ج}{۱}$$

۱۰۔ ثابت کرو کہ اگر لاجبیتی ہو تو جملہ $\frac{۱^۰ - ۲ج + ۳ - ۱}{۲}$ تمام قیمتیں
اختیار کرنے کی قابلیت رکھتا ہے بشرطیکہ $۱^۰$ کی قیمت ۱ اور $۲^۰$ کے درمیان
واقع ہو۔

۱۱۔ لا کی حقیقی قیمتوں کے لیے جملہ $\frac{۲ + ۱}{۲ + ۱ + ۳ + ۱}$ کی بڑی سے
بڑی قیمت دریافت کرو۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ اگر لاجبیتی ہو تو جملہ $\frac{۱^۰ - ۲ج}{۲ - ۱ج}$ کی قیمت ب
اور ج کے درمیان واقع نہیں ہو سکتی۔

۱۳۔ اگر مساوات $۱^۰$ لا + ۲ ب لا + ج = کی اصلیں حقیقی اور مختلف
ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات

$(۱ + ج)(۱^۰ لا + ۲ ب لا + ج) = ۲(ج - ۱)(۱^۰ لا + ۱)$ کی اصلیں
تجربیائی ہونگی اور برعکس اس کے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ اگر لاجبیتی ہو تو جملہ $\frac{(۱ - ۲ج)(۱ - ۱ج)}{(۱ - ۱ج)(۱ - ۲ج)}$ تمام قیمتیں

قبول کرنے کی قابلیت رکھتا ہے بشرطیکہ $۱^۰$ - ۲ اور ج - ۱ کی ایک
ہی علامت ہو۔

۱۱۸۔ اس باب کو ختم کرنے سے پہلے ہم چند متفرق مسئلے اور مثالیں

بیان کریں گے۔ مناسب ہونگا کہ ہم اس موقع پر طالب علم کو ایسی اصطلاحوں
اور ترجمہ سے مانوس کرایاں جو اعلیٰ ریاضی میں بکثرت

کام آتی ہیں۔
تعریف۔ اگر کسی مقدار کی قیمت مقدار لا کی قیمت پر منحصر ہو تو ہم کہتے ہیں کہ اول الذکر مقدار تفاعل ہے لا کا۔
 لا کے تفاعل کو عموماً $F(لا)$ ، $F(لا)$ ، $F(لا)$ کی صورت کی علامتوں سے تعبیر کرتے ہیں۔

پس مساوات $F(لا)$ کے یہ معنی ہیں کہ لا کی قیمت کی ہر تبدیلی کے جواب میں لا کی قیمت میں ایک تناظر تبدیلی ہوگی اور برعکس اس کے۔ مقادیر لا اور لا کو متغیر کہتے ہیں اور مزید امتیاز کے لیے انھیں بالترتیب متغیر متبوع اور متغیر تابع کہتے ہیں۔
 متغیر متبوع (خاص حدود کے اندر) کوئی قیمت اختیار کر سکتا ہے جو ہم اس کو دینا چاہیں اور متغیر تابع کی تناظر قیمت کا تعین اسی وقت ہو جاتا ہے جب متغیر تابع کی قیمت دے دی جاتی ہے۔

$$119. \quad لا + لا^{(1)} + لا^{(2)} + \dots + لا^{(n)} + لا^{(n)} کی$$

شکل کے جملہ کو، جہاں n ایک صحیح مثبت عدد ہے اور عددی سروں $لا^{(1)}$ ، $لا^{(2)}$ ، $لا^{(3)}$ ، $لا^{(4)}$ ، $لا^{(5)}$ ، $لا^{(6)}$ ، $لا^{(7)}$ ، $لا^{(8)}$ ، $لا^{(9)}$ ، $لا^{(10)}$ میں لا شریک نہیں ہے، لائیں n دیں درجہ کا منطق، صحیح جبر یہ تفاعل کہتے ہیں۔

اس باب میں ہم صرف اس قسم کے تفاعلوں پر بحث کریں گے۔
 ۱۲۰۔ اگر ایک تفاعل میں متغیر متبوع کی پہلی سے بڑی کوئی قوت واقع نہ ہو تو اس تفاعل کو درجہ اول کا تفاعل کہتے ہیں، مثلاً $لا + ب$ درجہ اول کا تفاعل ہے لا کا۔ ایک تفاعل درجہ دوم کا تفاعل کہلائیکا اگر اس میں متغیر کی کوئی قوت جس کا درجہ دو سے بڑا ہے، واقع نہ ہو، مثلاً $لا + ب + ج$ درجہ دوم کا تفاعل ہے لا کا تیسرے چوتھے..... درجوں کے تفاعل وہ تفاعل ہیں جن میں بڑے سے بڑے

درجہ کی رقمیں بالترتیب تیسرے، چوتھے..... درجوں کی ہوں پس دفعہ سابق میں دیا ہوا جملہ لا کان وہیں درجہ کا تفاعل ہے۔

۱۲۱۔ دو متغیروں پر متغیر لا اور ما کے تفاعل کو علامت ف (لا، ما) سے تعبیر کرتے ہیں۔ مثلاً لا + ب + ما + ج اور

لا + ا + ۲ + لا + ما + ب + ا + گ + لا + ۲ + ف + ما + ج

دو متغیروں لا اور ما کے بالترتیب درجہ اول اور درجہ دوم کے تفاعل ہیں۔

مساواتوں ف (لا) = اور ف (لا، ما) = کو درجہ اول یا درجہ دوم کی مساواتیں کہیں گے بموجب اس کے کہ ان کے مقابل کے تفاعل ف (لا)، ف (لا، ما) درجہ اول یا درجہ دوم کے ہوں۔

۱۲۲۔ دفعہ ۱۲۰ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ جملہ لا + ب + لا + ج کو شکل لا (لا - ع) (لا - ب) میں لکھا جاسکتا ہے جہاں ع اور ب مساوات لا + ب + لا + ج = کی اصلیں ہیں۔

پس درجہ دوم کا جملہ لا + ب + لا + ج درجہ اول کے دو منطق اجزائے ضروری میں تحلیل ہو سکیگا اگر لا + ب + لا + ج = کی اصلیں منطق ہوں یعنی اگر ب = ۴ لا + ج کامل مزع ہو۔

۱۲۳۔ کس شرط کے پورا ہونے پر متغیروں لا اور ما کا ایک دیا ہوا درجہ دوم کا جملہ دو خطی اجزائے ضروری میں تحلیل ہو سکیگا؟

دیے ہوئے جملہ یا تفاعل کو ف (لا، ما) سے تعبیر کرو جہاں

ف (لا، ما) = لا + ا + ۲ + لا + ما + ب + ا + گ + لا + ۲ + ف + ما + ج

اس کو لا کی نزولی قوتوں میں ترتیب دو اور مساوی صفر کے لکھو۔

پس لا + ا + ۲ + لا (ا + گ) + ب + ا + ۲ + ف + ما + ج =

لا میں درجہ دوم کی مساوات کو حل کرنے سے حاصل ہوگا

$$لا = (ا + گ) + ۲ (ا + گ + ب) - (ا + ب + ا + ۲ + ف + ما + ج)$$

یعنی $ل + لا + م + گ = \pm$ یا $ا (م - ب) + ۱۲ + (م - گ - ف) + (گ - ج)$
 اب اگر جملہ $(لا، ا)$ شکل $ل + لا + م + ن$ کے دو خطی اجزائے ضربی میں
 تحلیل ہو سکتا ہے تو ضروری ہے کہ علامت جذر کے اندر کی مقدار مربع کامل
 ہو۔

یعنی $(م - گ - ف) = (م - ب) (گ - ج)$
 سب رقموں کو ایک طرف منتقل کرنے اور $ل$ پر تقسیم کرنے سے
 حاصل ہوگا کہ

$$ا ب ج + ۲ ف گ م - ل ف ا - ب گ = ج م = .$$

یہ مسئلہ ہندسہ تحلیلی میں بہت کارآمد ہے۔
 نوٹ :- مندرجہ بالا استدلال میں یہ فرض کیا گیا ہے کہ $ل$ صفر
 نہیں ہے، اگر $ل$ صفر ہو تو ویسے ہوئے جملہ کو مائی نزولی قوتوں میں
 ترتیب دینے اور مابین درجہ دوم کی مساوات پر بحث کرنے سے
 یہی نتیجہ حاصل ہوگا۔

۱۲۴ - اس کے لیے شرط دریافت کرو کہ مساواتوں $ل + لا + ب + ج = .$
 اور $ل + لا + ب + ج = .$ کی ایک اصل مشترک ہو۔
 فرض کرو کہ $لا = م$ دونوں مساواتوں کی مشترک اصل ہے۔
 تب $ا م + ب م + ج = .$

$$ا م + ب م + ج = .$$

$$ا م + ب م + ج = .$$

اس لیے ضرب چلیپائی سے

$$\frac{ا}{ب - ج} = \frac{م}{ج - ا} = \frac{م}{ب - ج}$$

م کو سا قطر کرنے کے لیے دوسری نسبت کا مزید لیا اور اس کو باقی
 دو نسبتوں کے حاصل ضرب کے برابر لکھو۔

$$\frac{ا}{ب - ج} \times \frac{م}{ب - ج} = \frac{م}{ج - ا}$$

اس لیے (ج ل - ج ل) = (ب ج - ب ج) (ل ب - ل ب) بشرط
مطلوبہ ہے۔

نیز یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اگر درجہ دوم کے دو جملوں
ل ل + ب ل + م ل + ج م اور ل ل + ب ل + م ل + ج م کا ایک جزو ضربی
مشترک ہو تو اس صورت میں بھی یہی شرط ضروری ہوگی۔

امثلہ نمبری ۹ ج

۱۔ معلوم کرو کہ م کی کن قیمتوں کے لیے جملہ م ل + م ل + م ل + م ل
و مناطق اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے؟

۲۔ اگر جملہ ل ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل
کے حاصل ضرب کے برابر ہو تو م کی قیمتیں دریافت کرو۔

۳۔ ثابت کرو کہ جملہ ل ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل
اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے۔

۴۔ مساواتوں ل ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل
اصل مشترک ہو تو ثابت کرو کہ یہ اصل $\frac{ق-ق}{ق-ق} = \frac{ق-ق}{ق-ق}$ کی ایک
برابر ہوگی۔

۵۔ ایسی شرط معلوم کرو کہ جملات ل ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل
ل ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل مشترک ہو۔

۶۔ اگر جملہ ل ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل
درجہ اول میں تحلیل ہو سکے تو ثابت کرو کہ

ف مساوات ف ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل
کی ایک اصل ہے۔

۷۔ ایسی شرط معلوم کرو کہ جملات ل ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل
اور ل ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل

اور م ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل + م ل
پر بالترتیب تقسیم ہو سکیں۔

۸۔ ثابت کرو کہ مساوات $لا^۳ - ۳لا^۲ + ۲لا - ۳۵ = ۰$ میں
لا کے لیے کوئی حقیقی قیمت مندرج کرنے سے ماکی ایک حقیقی قیمت
حاصل ہوتی ہے اور ما کے لیے حقیقی قیمت مندرج کرنے سے لا کی حقیقی
قیمت حاصل ہوتی ہے۔

۹۔ اگر دو حقیقی مقداروں لا اور ما کا باہمی ربط مساوات
 $لا^۴ + ۲لا^۳ + لا^۲ - ۹۲لا - ۲۴۴ = ۰$ کے مطابق ہو تو ثابت کرو کہ
لا کی قیمت ۳ اور ۶ کے درمیان واقع ہوگی اور ما کی ۱ اور ۱۰ کے درمیان۔
۱۰۔ اگر $(لا^۳ + ب لا + ج) + لا^۲ + ب لا + ج = ۰$ تو ایسی
شرط دریافت کرو کہ لا ایک ناطق جملہ ہو ما کا۔

باب دوم

مساواتین ج مساوات اور جبہ دوم کی طرح حل ہو سکتی ہیں

۱۲۵۔ اگر کسی مساوات صحیح ج (لا) = کی ایک اصل ل ہو تو ہم جانتے ہیں کہ ج (لا) = (لا - ل) ج (لا) جہاں ج (لا) کا درجہ ج (لا) کے درجہ سے بقدر ایک کم ہے اس لیے معلوم ہوا کہ مساوات منفروضہ ج (لا) = کا حل مساوات ج (لا) = کے حل پر موقوف ہے اب ایسا ممکن ہے ج (لا) = مساوات درجہ دوم ہو جس صورت میں اس کا حل حسب معمول حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال مساوات، لا - لا - لا + لا + لا = کی اصلیں دریافت کرو ظاہر ہے کہ لا = اشرائط مساوات کو پورا کرتی ہے۔ اس لیے دی ہوئی مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے۔

$$(لا - ۱)(لا - ۲)(لا - ۳) = ۰$$

مساوات، لا - لا - لا = کی اصلیں $\frac{۳}{۲} \pm \frac{۳}{۲}$ ہیں۔

اس لیے دی ہوئی مساوات کی اصلیں ہوئیں $\frac{۳}{۲} + \frac{۳}{۲}$ ، $\frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲}$ ۔

ایسا ممکن ہے کہ کسی نہ کسی طرح سے ہم مساوات صحیح کو اس صورت میں تحلیل کر سکیں فنق ر = جہاں فنق ر میں

درجہ دوم کے صحیح جملے ہوں اس صورت میں مساوات زیر بحث کی اصلیں مساواتوں $f = ., q = ., r = .$ کو حل کرنے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

مثال - مساوات ک (لا + ب + ج) - گ (لا + ع + ف) = . کو حل کرو۔

دی ہوئی مساوات ہے

$$\{ \text{لاک} (لا + ب + ج) + \text{ماگ} (لا + ع + ف) \}$$

$$\times \{ \text{لاک} (لا + ب + ج) - \text{ماگ} (لا + ع + ف) \}$$

اس لیے مطلوبہ اصلیں درجہ دوم کی مساواتوں

$$(\text{لاک} + \text{وماگ}) (لا + ب + ج + ع + ف) = .$$

$$\text{اور} (\text{لاک} - \text{وماگ}) (لا + ب + ج - ع + ف) = .$$

کی چار اصلیں ہیں جو حسب معمول دریافت ہو سکتی ہیں۔

۱۲۶ - فرض کرو کہ کسی مساوات کی تحویل صورت ذیل میں ہو سکتی ہے۔

$$\text{یعنی } \{ ج (لا) \} + \{ ف (ج + لا) \} + ق = .$$

اگر اس میں ج (لا) کی جگہ مارکھا جائے تو دریافت کرنے کے لیے مساوات $ما + ف + ق = .$ حاصل ہوگی۔

$$\text{مساوات } ما + ف + ق = . \text{ کی اصلیں ہیں } - ف \pm \frac{ف - ق}{۲}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ج (لا)} = \frac{ف + ما - ق}{۲} \\ \text{ج (لا)} = \frac{ف - ما - ق}{۲} \end{array} \right\} \text{اس لیے}$$

اب اگر ج (لا) جملہ درجہ اول یا درجہ دوم بلحاظ لا کہے ہو تو (۱) کو

حل کرنے سے ہمیں وہی ہوئی مساوات کی تمام اصلیں حاصل ہو سکتی ہیں۔

مثال ۱۔ $۸ - \frac{۳}{۸} = ۳$ کو حل کرو۔

طرفین کو $\frac{۳}{۸}$ سے ضرب دینے اور عمل نقل سے

$$۸ - \frac{۳}{۸} = ۳$$

$$= (۸ - \frac{۳}{۸}) (۱ + \frac{۳}{۸})$$

اس لیے

یعنی

$$۸ = ۳ (۱ - \frac{۱}{۳})$$

یا

$$۸ = ۲$$

یا

مثال ۲۔ $۲ - \frac{۲}{۳} = ۳$ کو حل کرو۔

یہ مساوات صورت ذیل میں لکھی جاسکتی ہے۔

$$= ۳ + (۲) ۱۲ = ۳۲$$

$$= (۸ - ۲) (۴ - ۲)$$

$$۸ = ۲$$

پہلی مساوات کی ایک حقیقی اصل $۲ = ۳$ ہے اور دوسری کی $۳ = ۲$

مثال ۳۔ $۲ - \frac{۲}{۳} = ۳$ کو حل کرو۔

فرض کرو کہ

$$\frac{۲}{۳} = ۱$$

$$\frac{14}{b} + \frac{b}{1} = \frac{3}{1} + 62$$

کسروں کو دور کرنے سے $12b - 14 = 3 + 62b$ ۔
یعنی $(12b - 14) = (3 + 62b)$ ۔

$$جس سے \frac{b}{12} یا \frac{14}{b} = 6$$

$$اس لیے \frac{b}{12} یا \frac{14}{b} = 6$$

$$یعنی \frac{b}{12} یا \frac{14}{b} = 6$$

مثال ۴۔ $(5 - لا) (4 - لا) (4 + لا) (4 + لا) = 5.4$ کو حل
کر دو اہم جانب کے پہلے اور چوتھے اجزائے ضربی اور دوسرے
اور تیسرے اجزائے ضربی کو ضرب دینے سے
 $(لا - لا) (لا - لا) (لا - لا) (لا - لا) = 5.4$
اگر اس کو $(لا - لا)$ کے لحاظ سے درجہ دوم کی مساوات کی
شکل میں ترتیب دیں تو حاصل ہوگا۔

$$0 = 334 + (لا - لا) 42 - (لا - لا)^2$$

$$0 = (لا - لا) (4 - لا) (لا - لا) (لا - لا)$$

$$لا - لا - لا - لا = 4 - لا - لا - لا = 54 - لا$$

$$یعنی لا = 3 - 2 - 8 - 4$$

۱۲۶۔ اگر کوئی مساوات صورت

$لا + ب + لا + ج + ف + لا + ب + لا + ج = ق$ کی شکل میں لکھی
جاسکتی ہو تو اس کا حل اس طرح حاصل ہو سکتا ہے۔

$$فرض کرو کہ لا + ب + لا + ج = ۴$$

تب
اگر $ما + ف - ق = ۰$
عہ اور بہ اس مساوات کی اصلیں ہوں تو

$$لا + ب - لا + ج = عہ اور لا + ب - لا + ج = بہ$$

ان مساواتوں سے ہمیں لا کی ہم قیمتیں حاصل ہونگی۔

علامت جذر کے ماقبل جب کوئی علامت نہ ہو تو عموماً علامت مثبت کو متصرف خیال کرتے ہیں۔ اس لیے اگر عہ اور بہ دونوں مثبت ہوں تو لا کی چاروں اصلیں اصلی مساوات کی شرائط کو پورا کریں گی اگر عہ اور بہ میں سے ایک بھی منفی ہو تو اس کے جواب میں جو مساوات درجہ دوم حاصل ہوگی اس کی اصلیں

لا + ب - لا + ج - ف - لا + ب - لا + ج = ق کو پورا کریں گی لیکن اصلی مساوات کی شرائط کو پورا نہیں کریں گی۔

مثال ۱۔ لا - لا - لا + ۲ = ۳ + لا - لا = ۱۲ کو حل کرو۔

طرفین میں ۳ جمع کرنے سے

$$لا - لا - لا + ۲ + ۳ = ۳ + لا - لا + ۳ = ۱۵$$

اب فرض کرو کہ لا - لا - لا + ۳ = ۱

تب $ما + ۱۲ - ۱۵ = ۰$ جس سے $ما = ۳$ یا ۵

اس لیے $لا - لا - لا + ۳ = ۳$

یا $لا - لا - لا + ۳ = ۵$

ان مساواتوں کا مربع لینے اور حل کرنے سے ہمیں مساوات اول سے

حاصل ہوگا $۱۶ - ۱۲ = ۱$ اور مساوات دوم سے حاصل ہوگا $۲۵ - ۱۲ = ۱۳$

پہلی دو اصلیں دی ہوئی مساوات کو پورا کرتی ہیں مگر دوسری دو اصلیں
جو ما = ۵ کے جواب میں حاصل کی گئیں مساوات لا - ۵ - ۲
لا - ۵ - ۳ = ۱۲ کو پورا کرتی ہیں۔

مثال ۲۔ مساوات لا - ۵ - ۳ + لا - ۵ - ۱۸ = ۱۸ کو حل کرو
طرفین میں ۱۸ جمع کرنے سے لا - ۵ - ۳ + لا - ۵ - ۱۸ = ۱۸ + لا - ۵ - ۳
طرف کو مربع کامل بناؤ تو حاصل ہوگا

$$\frac{169}{4} = \frac{1}{4} + 18 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + 18 + \frac{1}{4}$$

$$\frac{13}{2} \pm = \frac{1}{2} + 18 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{13}{2} \pm = 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{13}{2} \pm = 18 + 1 = 19$$

یعنی اب ہمیں درجہ دوم کی دو مساواتیں حل کرنی ہیں۔ پہلی سے ہمیں
حاصل ہوگا

$$لا = ۹ یا - ۱ اور دوسری سے لا = \frac{1}{4} (\pm 13)$$

جانچنے سے معلوم ہوگا کہ پہلی دو اصلیں دی ہوئی مساوات کو پورا کرتی ہیں
لیکن دوسری دو اصلیں مساوات

$$لا - ۵ - ۳ = ۱۲ کو پورا کرتی ہیں۔$$

۱۲۸۔ کسی مساوات میں جذر کی علامتوں کو دور کرنے کے لیے

طرفین کا مربع لینے سے پہلے یہ جانچ لینا مناسب ہے کہ مساوات کی
طرفین میں کوئی مشترک جزو ضربی ہے یا نہیں۔

مثال ۱۔ مساوات

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

دی ہوئی مساوات ہے

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

اس میں طرفین کا مشترک جز و ضربی $\sqrt{12-11}$ ہے۔ اس مشترک جز و ضربی کو صفر کے مساوی بنانے سے دی ہوئی مساوات کا ایک حل یعنی $12=11$ حاصل ہوتا ہے۔
اس مشترک جز و ضربی کو دور کرنے کے بعد مساوات ہو جاتی ہے۔

$$\sqrt{12-11} = \sqrt{13+11} - \sqrt{15-11}$$

طرفین کا مربع لینے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$12-11 = (\sqrt{13+11} - \sqrt{15-11})^2 = 13+11 - 2\sqrt{(13+11)(15-11)} + 15-11$$

$$1 = 2\sqrt{(13+11)(15-11)} \quad \text{یعنی}$$

پھر طرفین کا مربع لینے اور سب رقموں کو ایک طرف لانے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$1 = 4 - 8\sqrt{11} + 40 = 36 - 8\sqrt{11}$$

$$8\sqrt{11} = 35 \quad \text{یعنی}$$

$$\sqrt{11} = \frac{35}{8} \quad \text{یعنی}$$

جانب کر دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ اصل $12=11$ دی ہوئی مساوات کے

پورا نہیں کرتی۔ پس دی ہوئی مساوات کی اصلیں ہیں۔

$$\sqrt{12-11} \text{ اور } \sqrt{13+11}$$

نوٹ۔ اگر کسی مساوات کو صحیح شکل میں تبدیل کرنے کے لیے طرفین کو کسی جملہ سے ضرب دیا جائے یا طرفین کا مربع لیا جائے تو تبدیل شدہ مساوات میں اکثر ایسی اصلیں داخل ہو جاتی ہیں جو دی ہوئی مساوات سے بیگانہ ہیں۔ ایسی ہر صورت میں طالب علم یہ جانچ لے کہ تبدیل شدہ مساوات کی اصلوں میں سے کون سی اصل یا اصلیں دی ہوئی مساوات کو پورا کرتی ہیں۔

$$\text{مثال ۲۔} \sqrt{12-11} + \sqrt{13+11} = \sqrt{15-11}$$

$$(1) \dots\dots\dots (\sqrt{4+3\lambda-\lambda^2}) + (\sqrt{3+2\lambda-\lambda^2}) =$$

عمل نقل سے

$$(\sqrt{4+3\lambda-\lambda^2}) - (\sqrt{1+4\lambda-\lambda^2})$$

$$(\sqrt{2+5\lambda-\lambda^2}) - (\sqrt{3+2\lambda-\lambda^2}) =$$

طرفین کا مربع لینے سے $3-\lambda-5+2\lambda-\lambda^2 = (\sqrt{4+3\lambda-\lambda^2})(\sqrt{1+4\lambda-\lambda^2})$

$$(\sqrt{2+5\lambda-\lambda^2})(\sqrt{3+2\lambda-\lambda^2}) = 3-\lambda-5+2\lambda-\lambda^2$$

$$(\sqrt{4+19\lambda-\lambda^2+10\lambda^2-\lambda^4}) \text{ یعنی}$$

$$(2) \dots\dots\dots \sqrt{4+19\lambda-\lambda^2+12\lambda^2-\lambda^4} =$$

(۲) کا مربع لینے اور عمل نقل سے $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$

$$(3) \dots\dots\dots = (1+\lambda)(\lambda+1-\lambda) \text{ یعنی}$$

اس لیے (۳) کی اصلیں ہوئیں۔ اور $\frac{\lambda \pm 1}{2}$ اب $\lambda = 1$ ۔ مساوات (۱) کو پورا کرتی ہے اور باقی دو اصلیں مساوات(۱) کو پورا نہیں کرتیں کیونکہ اگر $\lambda = \frac{\lambda \pm 1}{2}$ تو $\lambda + 1 - \lambda = 1 = 0$ اس لیے $\lambda = -1$ ۔ اب λ کی یہ قیمت استعمال کرنے سے مساوات (۱)مساوات $\sqrt{4+19\lambda-\lambda^2} = \sqrt{3+2\lambda-\lambda^2}$ میں تحویل ہوتی ہےجو $\lambda = \frac{\lambda \pm 1}{2}$ سے پوری نہیں ہوتی۔

۱۲۹۔ چند صورتوں میں ذیل کی تدبیر (artifice) مفید ثابت ہوتی ہے

مثال۔ مساوات $\sqrt{3-\lambda^2} + \sqrt{3+2\lambda-\lambda^2} + \sqrt{11-\lambda^2} = 9 \dots (1)$

کو حل کرو۔

یعنی (۱) $\left(\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{ب}}\right) + \left(\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{ج}}\right) - ۱۲ = ۰$ (۳)

رشتہ (۳) $\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{ب}}$ میں درجہ دوم کی مساوات ہے۔
اگر مساوات (۳) کی اصلیں عہ اور بہ ہوں تو $\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{ب}} = \text{عہ یا بہ}$

یعنی (۴) $\begin{cases} \text{لا} - \text{عہ} = ۱ + \frac{1}{\text{ب}} \\ \text{لا} - \text{بہ} = ۱ + \frac{1}{\text{ج}} \end{cases}$

اور ان درجہ دوم کی دو مساواتوں کی چار اصلیں ہونگی جو دی ہوئی مساوات (۱) کو پورا کرتی ہیں۔

مثال ۱۔ مساوات $۱۲ - \frac{1}{\text{لا}} - \frac{1}{\text{ب}} = ۰$ کو حل کرو۔
لا پر تقسیم کرنے اور ترتیب دینے سے

$$۱۲ - \left(\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{ب}}\right) = ۰$$

فرض کرو کہ $\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{ب}} = \text{ی}$ تب $\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{ب}} = \text{ی}$ (۲)

$$۱۲ - (\text{ی} - ۲) = ۰ \Rightarrow ۱۲ - \text{ی} + ۲ = ۰ \Rightarrow ۱۴ - \text{ی} = ۰ \Rightarrow \text{ی} = ۱۴$$

جس سے حاصل ہوتا ہے $\text{ی} = \frac{۱۴}{۱} = ۱۴$

$$\frac{۱۴}{۱} = \frac{۱}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{ب}}$$

اور ان مساواتوں کو حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۲}, \frac{۱}{۲}, ۲ = \text{لا}$$

مثال ۲۔ ۱ کے پانچویں جذر کی قیمتیں دریافت کرو۔

ہمیں مساوات $\text{لا} = ۱ + \frac{1}{\text{لا}}$ یعنی $\text{لا} - ۱ = \frac{1}{\text{لا}}$ حل کرنی ہے اس مساوات

کی تحلیل ان دو مساواتوں میں ہو سکتی ہے۔

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{لا} - ۱ = ۰ \\ \text{لا}^۲ + \text{لا} + ۱ = ۰ \end{array} \right\}$$

دوسری مساوات درجہ چہارم کی متکافی مساوات ہے اور اس کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$۰ = ۱ - \left(\frac{۱}{\text{لا}} + \text{لا} \right) + \left(\frac{۱}{\text{لا}} + \text{لا} \right)^۲$$

اس مساوات کو بلحاظ لا + ۱ کے حل کرنے سے حاصل ہوگا۔

$$\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}} = \frac{\text{لا}^۲ + ۱}{۲} \text{ یا } \frac{\text{لا}^۲ + ۱ - ۲}{۲}$$

ان سے درجہ دوم کی دو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں، یعنی

$$\text{لا}^۲ + \frac{\text{لا}^۲ + ۱}{۲} = ۱ + \text{لا}$$

$$\text{اور } \text{لا}^۲ + \frac{\text{لا}^۲ + ۱}{۲} = ۱ + \text{لا}$$

ان مساواتوں سے لا کی ۴ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنی

$$- \frac{(\text{لا} + ۱)}{۲} \pm \sqrt{\frac{(\text{لا} + ۱)^۲ - ۴(\text{لا}^۲ + ۱)}{۴}} \text{ یا } \frac{(\text{لا} - ۱)}{۲} \pm \sqrt{\frac{(\text{لا} - ۱)^۲ - ۴(\text{لا}^۲ + ۱)}{۴}}$$

مندرجہ بالا چار قیمتیں اور ایک + ۱ کے پانچوں جذر کی پانچ قیمتیں ہیں۔
۱۳۔ اگرچہ ذیل کی مساوات متکافی نہیں ہے تاہم اس کو دفعہ سابق کے طریقہ سے حل کر سکتے ہیں۔

مثال۔ مساوات ۶ لا - ۲۵ لا + ۱۲ لا + ۲۵ لا + ۶ = ۰ کو حل کرو۔
لا پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوگا۔

$$۰ = ۱۲ + \left(\frac{۱}{\text{لا}} - \text{لا} \right) ۲۵ - \left(\frac{۱}{\text{لا}} + \text{لا} \right) ۶$$

جس سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$۰ = ۲۴ + \left(\frac{۱}{۵} - ۱۱\right) ۲۵ - \left(\frac{۱}{۵} - ۱۱\right)^۲$$

$$\therefore ۰ = ۸ - \left(\frac{۱}{۵} - ۱۱\right) ۳ \text{ یا } ۰ = ۳ - \left(\frac{۱}{۵} - ۱۱\right) ۲$$

اور ان آخری رشتوں سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$۱۱ = ۲ - \frac{۱}{۵} \text{ یا } ۳ - \frac{۱}{۵}$$

۱۳۲۔ اگر درجہ دوم کی مساوات کی ایک اصل صاف طور پر ظاہر ہو تو

درجہ دوم کی مساوات کی اصلوں کے اُن باہمی رشتوں کی مدد سے جو دفعہ ۱۱ میں اصل کی گھٹیں دوسری اصل آسانی سے معلوم کی جاسکتی ہے۔

مثال۔ مساوات $(۱ - \frac{۱}{۲})(۱ + \frac{۱}{۲}) - ۲(۱ - \frac{۱}{۲}) = ۰$ کو حل کرو۔

یہ لایں درجہ دوم کی مساوات ہے جس کی ایک اصل صریحاً ۱ ہے
نیز دی ہوئی مساوات لکھی جاسکتی ہے۔

$$۲(۱ + \frac{۱}{۲}) + (۱ - \frac{۱}{۲}) - ۱(۱ + \frac{۱}{۲}) = ۰$$

اس کی اصلوں کا حاصل ضرب ہے۔ $\frac{۱}{۲} + ۱$

اس لیے دی ہوئی مساوات کی دوسری اصل $\frac{۱}{۲} + ۱$ ہے۔

مثلاً نمبر ۱۰

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$۱ - ۱۱ - ۲ = ۱ - ۲ - ۱۱ = ۸ \quad ۲ - ۲ - ۱۱ = ۵$$

$$۳ - ۱۱ - ۲ = ۳ - ۱۱ - ۲ = ۰ \quad ۴ - ۱۱ - ۳ = ۴ - ۱۱ - ۳ = ۰$$

$$۵ - ۱۱ - ۴ = ۵ - ۱۱ - ۴ = ۰$$

$$۶ - ۱۱ - ۵ = ۶ - ۱۱ - ۵ = ۰$$

$$۲۲ \frac{۲}{۳} = \frac{۵}{۳} \sqrt{۷} + \frac{۳}{۵} \sqrt{۵} - ۸ \quad ۲۱۰ = \sqrt{۷} + ۹ - ۷$$

$$۲ \frac{۱}{۴} = \frac{۵-۱}{۵} \sqrt{۷} + \frac{۵}{۵-۱} \sqrt{۷} - ۹$$

$$۵ \times ۳۲ = ۱ + ۸ + ۵ \times ۲ - ۱۱ \quad ۲۶ = (\sqrt{۷} - ۵ + \sqrt{۷} - ۵) ۵ - ۱۰$$

$$۲ = \frac{۱}{\sqrt{۷}} + \sqrt{۲} - ۱۲$$

$$۱۶۸ = (۱ + \sqrt{۷})(۵ + \sqrt{۷})(۳ - \sqrt{۷})(۷ - \sqrt{۷}) - ۱۳$$

$$۳۸۵ = (۵ + \sqrt{۷})(۷ - \sqrt{۷})(۳ - \sqrt{۷})(۹ + \sqrt{۷}) - ۱۴$$

$$۶۳ = (۳ - \sqrt{۷})(۲ - \sqrt{۷})(۱ + \sqrt{۷})(۷ - \sqrt{۷}) - ۱۵$$

$$۹۱ = (۵ + \sqrt{۷})(۹ - \sqrt{۷})(۷ - \sqrt{۷})(۷ - \sqrt{۷}) - ۱۶$$

$$۵۱ = (۱۸ + \sqrt{۷})(۱۳ + \sqrt{۷})(۸ + \sqrt{۷})(۳ + \sqrt{۷}) - ۱۷$$

$$۱۸ = \sqrt{۷} - \sqrt{۷} - \sqrt{۷} \sqrt{۷} + \sqrt{۷} - \sqrt{۷} - ۱۸$$

$$۵۱۶ = \sqrt{۷} + \sqrt{۷} - \sqrt{۷} \sqrt{۷} + \sqrt{۷} - \sqrt{۷} - ۱۹$$

$$\frac{\sqrt{۷}(۱ + \sqrt{۷})}{۳} = \sqrt{۷} + \sqrt{۷} - \sqrt{۷} \sqrt{۷} + \frac{\sqrt{۷} - \sqrt{۷}}{۳} - ۲۰$$

$$\sqrt{۷} \left(\sqrt{۷} + \frac{۸}{\sqrt{۷}} \right) = \frac{۱ + \sqrt{۷} - \sqrt{۷} \sqrt{۷}}{\sqrt{۷}} - \sqrt{۷} - ۲۱$$

$$= ۱ - \sqrt{۷} - \sqrt{۷} \sqrt{۷} - (۷ + \sqrt{۷} - \sqrt{۷}) \sqrt{۷} + \sqrt{۷} - \sqrt{۷} + \sqrt{۷} \sqrt{۷} - ۲۲$$

$$\sqrt{۷} ۹ - \sqrt{۷} ۳ + \sqrt{۷} ۲ = \sqrt{۷} ۹ - \sqrt{۷} ۳ + \sqrt{۷} ۲ - \sqrt{۷} ۳ - \sqrt{۷} ۲ + \sqrt{۷} ۲ - ۲۳$$

$$۱۱ - \sqrt{۷} ۲۱ + \sqrt{۷} ۲ = ۱ - \sqrt{۷} \sqrt{۷} + \sqrt{۷} + \sqrt{۷} ۹ - \sqrt{۷} ۲ - ۲۴$$

$$۱ = ۹ - \sqrt{۷} ۵ + \sqrt{۷} ۲ - \sqrt{۷} - \sqrt{۷} ۵ + \sqrt{۷} ۲ - ۲۵$$

$$۱ = \sqrt{۷} + \sqrt{۷} ۹ - \sqrt{۷} \sqrt{۷} - ۱ + \sqrt{۷} - \sqrt{۷} \sqrt{۷} - ۲۶$$

مثال ۱ - حل کرو $39 = (3+6)(2+11) + 3+6+2+11$

$$421 = (3+6)(2+11) + (3+6)^2 + (2+11)^2$$

فرض کرو کہ $2+11 = و$ اور $3+6 = ه$ تب

(1) $r_9 = \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}$

(2) $\dots \dots \dots \angle \mu = \Delta_0 + \Delta + \Delta$

اس لیے (۲) کو (۱) پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوگا۔

(۳) $19 = \sqrt{50} - 5 + 9$

(۱) اور (۳) سے $29 = A + 2$

اور $10 = \sqrt{100}$ اور $100 = 10^2$

$$r_0 \in r = \Delta \tilde{r} \in r_0 = 1$$

$$22 \bar{6}_1 = \bar{6}' 22 \bar{6}_1 = 0$$

مثال ۲۔ حل کرو لا + ما = ۸۳

$(r) \dots \dots \dots r = 6 - 1$

فرض کرو $لا = و + ھ$ اور $ما = و - ھ$

تب مساوات (۲) سے حاصل ہوگا $h = 1$

ہ کی اس قیمت کو مساوات (۱) میں مندرج کرنے سے

$$A_T = r(1 - \rho) + r(1 + \rho)$$

$$A^2 = (1 + \gamma, \gamma + \gamma^2)^2$$

$$\therefore = 4 - 5 + 5$$

$$1. - \sqrt{1 \pm 1} \pm = 0.91 - 1 = -0.09$$

$$1 - \sqrt{1 - r^2} = 0$$

$$1 - \sqrt{\pm 1 - p} = 6$$

مثال ۳۔ حل کرو $\frac{1}{15} = \frac{1-u}{1+u} - \frac{1+u^2}{1-u^3}$ (۱)۔

(2) 29 = 60 + 06

$$(\tilde{I} - (U_1 + U_2))r_n = (\tilde{I} - (U_1 + U_2) - \tilde{I} + (U_1 + U_2))10 \in (1)$$

$$\therefore 129\lambda^2 - 1229\lambda - 638 = 0$$

$$\therefore 0 = (619 + 723)(64 - 73)$$

اس لیے $62 = 73$ (۳)

یا $619 = 723$ (۴)

مساوات (۳) سے $\frac{6}{7} = \frac{6}{7} = \frac{65+14}{29} = 1$ بموجب مساوات (۲)

$$\therefore 3 = 6, 2 = 7$$

نیز (۴) سے $\frac{6}{19} = \frac{6}{19} = \frac{65+14}{82} = \frac{29}{82}$ بموجب مساوات (۲)

$$\therefore 1229\lambda^2 = 6551\lambda - 638$$

اس لیے $1229\lambda^2 = 6551\lambda - 638$ یا $3 = 6, 2 = 7$

مثال ۴ - حل کرو کہ $8 = 3\lambda^2 + 6\lambda^2 + 6$

$$1 - 2\lambda^2 - 2\lambda^2 + 6\lambda^2 + 6\lambda^2 = 1$$

فرض کرو کہ $\lambda = m$ ان دو مساواتوں میں m کی قیمت مندرجہ کرتے سے

(۱) $8 = (m^3 + m^3 + m^2)$

(۲) $1 = (m^3 - 2m^2 + m^2)$

$$\therefore 8 = \frac{m^3 + m^3 + m^2}{m^3 - 2m^2 + m^2}$$

یعنی $m^3 - 8m^2 + 19m - 12 = 0$

یعنی $0 = (m-1)(m-3)(m-4)$

اس لیے $m = 1$ یا 3 یا 4

(۱) فرض کرو کہ $m = 1$ مساوات (۱) یا (۲) میں m کی یہ قیمت مندرجہ کرو

مساوات (۲) سے $1 = 1$ اس لیے $1 = 1$

اور $1 = m = 1 = 1$

(ب) فرض کرو کہ $m = 3$ ، مساوات (۲) میں یہ قیمت رکھنے سے

$$5 \text{ لا} = 1 \text{ اس لیے لا} = \frac{1}{5}$$

اور $ما = 3 \text{ لا} = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

(ج) فرض کرو کہ $m = 4$

تب $10 \text{ لا} = 1 \text{ اس لیے لا} = \frac{1}{10}$

اور $ما = 4 \text{ لا} = 4 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$

اس لیے مکمل حل یہ ہے

$$لا = \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{10}, \frac{4}{10}$$

$$ما = 3, 4, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$$

نوٹ۔ اگر مساواتیں متجانس اور ایک ہی درجہ کی ہوں تو طریقہ بالا کی مدد سے حل ہمیشہ بہ آسانی حاصل ہو سکیں گے۔

مثال ۵۔ حل کرو $3 \text{ لا} + 2 \text{ ما} = 11$ $2 \text{ لا} + 3 \text{ ما} = 4$ (۱)

(۲) $لا - 2 \text{ لا} + 3 \text{ ما} = 8$

(۲) سے $8 - لا = 2 \text{ لا} + 3 \text{ ما}$

اس کو مساوات (۱) میں مندرج کرنے سے

$$3 \text{ لا} + 2 \text{ ما} + 8 - لا = 11 + 2 \text{ لا} + 3 \text{ ما} \Rightarrow 2 \text{ لا} + 2 \text{ ما} = 3$$

$$\Rightarrow 3 \text{ لا} + 2 \text{ ما} + 8 - لا = 11 + 2 \text{ لا} + 3 \text{ ما} \Rightarrow 2 \text{ لا} + 2 \text{ ما} = 3$$

$$\Rightarrow 3 \text{ لا} + 2 \text{ ما} + 8 - لا = 11 + 2 \text{ لا} + 3 \text{ ما} \Rightarrow 2 \text{ لا} + 2 \text{ ما} = 3$$

یعنی $لا - 10 \text{ لا} + 9 \text{ ما} = 0$ (۳)

$$\Rightarrow (لا - 10) (9 \text{ ما}) = 0$$

اس لیے $لا = 10$ یا $ما = 0$

ان صورتوں میں سے ہر ایک کو مساوات (۲) میں یکے بعد دیگرے

مندرجہ ذیل سے

$$۲ \pm = ۱ = ۱$$

$$\sqrt{\frac{۲}{۳}} \pm = ۱ = ۱$$

$$۱ \pm = ۱ = ۱$$

$$\sqrt{\frac{۲}{۳}} \pm = ۱ = ۱$$

نوٹ :- یہ بات قابل توجہ ہے کہ مساوات (۳) متجانس ہے اس جگہ ہم نے ایک مساوات کو دوسری مساوات کی مدد سے متجانس بنا لیا ہے۔ یہ ترکیب نہایت کارآمد ہے اور ہندسہ تخلیلی میں کثرت سے استعمال ہوتی ہے۔

مثال ۶۔ حل کرو $(۱+۱) + \frac{1}{2}(۱-۱) = ۳$ (۱)۔۔۔۔۔

$$(۲)۔۔۔۔۔ ۱۳ = ۱۲ - ۱$$

مساوات (۱) کی ہر ایک رقم کو $(۱-۱)$ یا $(۱+۱)$ یا $(۱-۱)$ پر تقسیم کریں تو حاصل ہوگا۔

$$۳ = \left(\frac{۱-۱}{۱+۱} \right) ۲ + \left(\frac{۱+۱}{۱-۱} \right)$$

یہ مساوات بلحاظ $\left(\frac{۱+۱}{۱-۱} \right)$ کے مساوات درجہ دوم ہے جس سے

$$۸ = \frac{۱+۱}{۱-۱} \text{ یا } ۲ = \frac{۱+۱}{۱-۱} \text{ جس سے } ۸ = \frac{۱+۱}{۱-۱}$$

$$۸ = ۱۱ = ۱۱$$

ان مساواتوں کو (۲) کے ساتھ ملا کر حل کرنے سے حاصل ہوگا۔

$$۱ = ۱ = ۱ \text{ یا } ۱ = ۱ = ۱$$

امثلہ نمبری ۱۰ ب

معاذلات ذیل کو حل کرو۔

$$۳ = ۶ - ۵ - ۲$$

$$۲۵ = ۶ - ۴ - ۵$$

$$۹۳۱ = ۶ + ۶ + ۶ - ۴$$

$$۱۹ = ۶ - ۶ + ۶$$

$$۶۵ = ۶ + ۶ + ۶ - ۶$$

$$۲۲۷۵ = ۶ + ۶ + ۶$$

$$۷ = ۶ - ۵ - ۳ - ۸$$

$$۲ = ۶ - ۶ - ۳$$

$$۱۷۱۶ = ۱۶۵ + ۳ - ۱۰$$

$$۱۳۲ = ۶ + ۶ + ۷$$

$$۶۷۳ = ۳ - ۶ + ۷ - ۱۲$$

$$= ۶ + ۶ - ۷ - ۲$$

$$۲۷۲ = ۶ + ۷ - ۱۴$$

$$۲ = ۶ - ۷$$

$$۷ = ۶ - ۳ - ۱$$

$$۲۰ = ۶$$

$$۱ = ۶ - ۳ - ۲$$

$$۲۵ = ۶ + ۶ + ۶$$

$$۸۴ = ۶ + ۶ + ۶ - ۵$$

$$۶ = ۶ + ۶ - ۷$$

$$۷ + ۷ = ۶ + ۷ - ۷$$

$$۶ - ۱۳۳ = ۶ + ۷$$

$$۱۷ = ۷ - ۷ - ۵ - ۹$$

$$۶ = ۷ - ۶ - ۵$$

$$۱۵ = ۶ + ۶ + ۳ - ۱۱$$

$$۴۵ = ۶ - ۳ - ۶ - ۳$$

$$۷ - ۶ = ۶ + ۷ - ۱۳$$

$$۸ = ۶ + ۷$$

$$۲ = ۶ - ۷ - ۹۹۲ = ۶ - ۷ - ۱۵$$

$$۲۵ = \frac{۶}{۷} + ۶ - ۱ = \frac{۶}{۷} + ۷ - ۱۶$$

$$۵ = \frac{۶}{۵} + \frac{۷}{۶} - ۱۸$$

$$\frac{۹}{۲} = \frac{۶}{۷} + \frac{۷}{۶} - ۱۷$$

$$\frac{۵}{۶} = \frac{۵}{۶} + \frac{۲}{۷}$$

$$۱ = \frac{۳}{۶ + ۷}$$

$$۲۰ = \frac{۱}{۲} ۷۶ + \frac{۱}{۲} ۶۷ - ۲۰$$

$$۱۰۷۲ = ۶ + ۷ - ۱۹$$

$$۶۵ = \frac{۶}{۶} + \frac{۳}{۷}$$

$$۱۶ = \frac{۱}{۶} ۶ + \frac{۱}{۶} ۷$$

$$r = \sqrt{b-u} + \sqrt{b+u} - 22 \quad s = \frac{1}{r}\sqrt{b} + \frac{1}{r}\sqrt{u} - 21$$

$$q = \sqrt{b} - \sqrt{u} \quad s = \left(\frac{1}{r}\sqrt{b} + \frac{1}{r}\sqrt{u}\right) q$$

$$\frac{10}{r} = \frac{\sqrt{b}}{u} + \frac{\sqrt{u}}{b} - 22 \quad r = \sqrt{1-u} + b - 22$$

$$10 = b + u \quad \sqrt{b} = \sqrt{1-u} - \sqrt{1+u}$$

$$\frac{10}{r} = \frac{\sqrt{b+u} + \sqrt{b-u}}{\sqrt{b-u} - \sqrt{b+u}} + \frac{\sqrt{b-u} - \sqrt{b+u}}{\sqrt{b+u} + \sqrt{b-u}} - 25$$

$$10 \cdot r = \sqrt{b} + \sqrt{u}$$

$$r = \sqrt{b} + \sqrt{u} - 24 \quad 10 = \sqrt{b} + \sqrt{u} - 24$$

$$\sqrt{b} + \sqrt{u} - 24 = 10 \quad \sqrt{b} + \sqrt{u} = 34$$

$$10 = \sqrt{b} + \sqrt{u} - 24 \quad \sqrt{b} + \sqrt{u} = 34$$

$$10 = \sqrt{b} + \sqrt{u} - 24 \quad \sqrt{b} + \sqrt{u} = 34$$

$$\sqrt{b} + \sqrt{u} = 34 \quad (\sqrt{b} + \sqrt{u})^2 = 1156$$

$$b + u + 2\sqrt{bu} = 1156$$

$$r = \sqrt{b-u} + \sqrt{b+u} - 22 = \frac{\sqrt{b-u}}{r} + \frac{\sqrt{b+u}}{r} - 22$$

$$0 = 8 + (\sqrt{u} + \sqrt{b})^2 = 24 + (\sqrt{u} - \sqrt{b})^2 - 24$$

$$1 = (\sqrt{u} - \sqrt{b})^2 = 21 + \sqrt{b} + \sqrt{u} - 24$$

$$10 = \sqrt{b} + \sqrt{u} - 24 \quad \sqrt{b} + \sqrt{u} = 34$$

$$r = \sqrt{b-u} + \sqrt{b+u} - 22 = 14 + \sqrt{b} + \sqrt{u} - 24$$

$$(\sqrt{b+u}) = \sqrt{b} + \sqrt{u} = 34$$

$$b + u = 1156$$

$$0 = \frac{1}{b} - \frac{1}{u} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{u} - 24$$

$$1 = \frac{r_c}{r_f} - \frac{6v}{fr} + \frac{r}{v} = \frac{r}{f} + \left(\frac{6}{v} - \frac{v}{f} \right) \frac{r}{f} - \frac{r}{f}$$

مثال ۱ - حل کرو لا + ما + ی = ۱۳ ----- (۱)

(२) १० = $\bar{G} + \bar{L} + \bar{U}$

(३) 10 = 60

$$۸۵ = ۲ + (۶ + ۷) \text{ سے } (۳) \text{ اور } (۲)$$

لا + ما کی جگہ و رکھنے سے یہ مساوات ہو جائیگی۔

وآ + ی = ۸۵ نیز (۱) سے و + ی = ۱۳

جس سے حاصل ہوگا و = ۷ یا ۶ ی = ۶ یا ۷

پس $\begin{cases} 4 = 6 + 10 \\ 10 = 6 + 14 \end{cases}$ اور $\begin{cases} 14 = 6 + 10 \\ 10 = 6 + 14 \end{cases}$

اس لیے

$$\begin{cases} 5 \text{ یا } 2 = 6 \\ 2 \text{ یا } 5 = 6 \\ 4 = 5 \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} 1 - 2 = 3 \\ 1 - 2 + 3 = 6 \\ 4 = 5 \end{cases}$$

مثال ۲- حل کرو $(1 + \sqrt{3})^n = 2^n$

$$15 = (11 + 6)(5 + 6)$$

$$18 = (6+6)(11+6)$$

۱۸ = (۵+۶) (۵+۷)
 ما، ی، ی + لا + لا + ما کی جگہ بالترتیب و، ہ، مے لکھنے سے

(۱) ۳۰ = ۷، ۱۵ = ۵، ۱۸ = ۶

ان مساواتوں کو اکٹھا ضرب دینے سے

$$4 \times 10 = 1 \times 10 \times 4 = 2 \times 5$$

∴ وہے = $90 \pm$

اس نتیجے کو مساواتوں (۱) میں سے ہر ایک کے ساتھ ملانے سے

$$و = ۳، ھ = ۴، مے = ۵ یا و = ۳، ھ = ۴، مے = ۵$$

$$\begin{cases} ۳ = م + ی \\ ۴ = لا + ی \\ ۵ = لا + م \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} ۳ = م + ی \\ ۴ = لا + ی \\ ۵ = لا + م \end{cases}$$

جس سے لا = م، م = ا، ی = ۲ یا لا = م، م = ا، ی = ۲

(۱) مثال ۳ - حل کرو $۴۹ = م + م + ی + ی$

(۲) $۱۹ = لا + لا + ی + ی$

(۳) $۳۹ = لا + لا + م + م$

(۲) کو (۱) سے تفریق کرنے سے

$$۳۰ = لا - م + ی - ی$$

(۴) یعنی $۳۰ = (لا - م) + (ی - ی)$

اسی طرح (۱) اور (۳) سے

(۵) $۱۰ = (لا - م) + (ی - ی)$

اس لیے (۴) اور (۵) سے بذریعہ عمل تقسیم

$$۳ = \frac{لا - م}{ی - ی}$$

$$۳ = م - ی$$

جس سے

مساوات (۳) میں م کی یہ قیمت مستدرج کرنے سے

$$۱۳ = لا - ۳ + ی + ی$$

مساوات (۲) سے $۱۹ = لا + لا + ی + ی$

ان متجانس مساواتوں کو حل کرنے سے حاصل ہوگا

$$لا = ۲، ی = ۳ اور اس لیے م = ۵$$

$$یا لا = \frac{۱۱}{۲}، ی = \frac{۱}{۲} اور اس لیے م = \frac{۱۹}{۲}$$

مثال ۴۔ حل کرو لا۔ مای = ا، مای۔ ی لا = ب، ی۔ لا مای = ج، ان مساواتوں کو مای، ی، لا سے بالترتیب ضرب دیئے اور جمع کرنے سے حاصل ہوگا،

ج + لا + ا + مای + ب + ی = (۱)
ان مساواتوں کو ی، لا، مای سے بالترتیب ضرب دیئے اور جمع کرنے سے حاصل ہوگا،

ب + لا + ج + مای + ا + ی = (۲)
(۱) اور (۲) سے بذریعہ ضرب چلیپائی

لا = مای = ج = ی = ک (فرض کرو)
ا۔ ب۔ ج۔ مای = ج۔ ا۔ ی۔ لا = ج۔ ا۔ ی۔ لا = ک (۱ + ۲ + ۳ + ۴) = ۱۰
دی ہوئی مساواتوں میں سے کسی ایک میں یہ قیمتیں مستدرج کرنے سے

لا = مای = ج = ی = ک (۱ + ۲ + ۳ + ۴) = ۱۰

امثلہ نمبری ۱۰۔ ج

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۱$$

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۱$$

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۱$$

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۱$$

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۱$$

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۱$$

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۱$$

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۱$$

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۱$$

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۱$$

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۱$$

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۱$$

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۱$$

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۱$$

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۱$$

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۱$$

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۱$$

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۱$$

باب یازدہم

ترتیب واجتماع

۱۳۵۔ اگر متعدد اشیاء میں سے چند یا سب اشیاء لے کر انہیں مختلف طریقوں سے سلسلہ وار رکھا جائے تو ایسے ہر ایک طریقے کو ترتیب اشیاء کہتے ہیں مثلاً کل ترتیبیں جو حروف اب، ب، ج، د میں سے دو دو حرف اکٹھے لینے سے بن سکتی ہیں ۱۲ ہیں یعنی

اب، اج، اد، ب ج، ب د، ج د

با، جا، دا، با ج، دب، دج

ان میں سے ہر ایک دو دو حرف کی ایک مختلف ترتیب ہے۔
اگر انہی چار حرف میں سے تین تین حرف کی مختلف ترتیبیں لگائیں تو وہ تعداد میں ۲۴ ہونگی۔

اب ج، اب د، اج د، ب ج د

اج ب، اد ب، اد ج، ب د ج

ب ج ا، ب د ا، ج د ا، ج د ب

با ج، با د، ج ا د، ج ب د

ج ا ب، د ا ب، د ا ج، دب ج

ج ب ا، دب ا، ج ا ب، د ج ب

جس سے ظاہر ہے کہ چار حرف کی ۲۴ مختلف ترتیبیں ہیں جن میں سے ہر ایک ترتیب میں چاروں حرف اکٹھے شامل ہوتے ہیں۔

ہر ایک ترتیب میں چاروں طرف سے اس کے سامنے ہوتا ہے۔
تقریباً - ہر ایک ایسا مجموعہ جو متعدد اشیاء میں سے
چند یا سب اشیاء اکٹھا کرنے سے بن سکتا ہے اور جس میں ترتیب اشیاء
لمحوظ نہیں رکھی جاتی اجتماع اشیاء کہلاتا ہے۔

ملفوظ نہیں رلھی جانی اجتماع استیاء لہلا ما ہے ۔
مثلاً چار حرف ا، ب، ج، د میں سے کل اجتماع جو ایک ایک حرف
دو دو حرف، تین تین حرف اور چار چار حرف اکٹھے لینے سے بن سکتے
ہیں مفصلہ ذیل ہیں ۔

کل اجتماع ایک ایک حرف لینے سے 'ا ب ج' و تعداد میں ۴ ہیں

کل اجتماع دو دو حرف اکٹھے لینے سے { اب، اج، اد } { ب، بج، بد } ۶ ہیں

” تمین تین ” اربع ارج د’ ارب د’ بیج و ” م ”

اب ج د

اگر نیشیاد میں سے ر (رے، رے) اشیاء لے کر ان کی مختلف

ترتیبیں لگائی جائیں تو اپنی آئینہ سہولت کے لیے ہم ان مختلف ترتیبوں

کہ تعداد کو بہت سے تعبیر کرنے کی اسی طرح سے اگر ان اشیاء میں سے

رہنما کے مختلف اجتماع بنائے جائیں تو ایسے اجتماعوں کی

تعداد کو سمجھو۔ جس سے تصور کی شگے۔

معدود لوہم نجر سے تعبیر کرے۔

اس طریق کتابت کے مطابق نتائج مندرجہ بالا اختصار آیوں کے جاسکتے ہیں :-

$$۴ = ۱۲ \quad ۳ = ۲۴ \quad ۲ = ۴۸$$

$$۱۲ = ۴ \quad ۲۴ = ۳ \quad ۴۸ = ۲$$

نیز ہج = ۱ - چونکہ چار حرف میں سے چار چار حرف کا ایک ہی اجتماع بن سکتا ہے -

ہمیں معلوم ہے کہ ۴ حرف میں سے تین تین حرف کے اجتماع تعداد میں چار ہیں یعنی

ا ب ج ، ا ب د ، ا ب ج د

اب ان میں سے ہر ایک مجموعہ مثلاً ا ب ج چھ مختلف طرح سے ترتیب دیا جاسکتا ہے یعنی

ا ب ج ب ج ا ج ا ب

ا ج ب ب ا ج ج ب ا

اسی طرح سے ا ب د ، ا ب ج د ، ب ج د میں سے ہر ایک اجتماع چھ مختلف طرح سے ترتیب دیا جاسکتا ہے - پس معلوم ہوا کہ چار اشیاء میں سے تین تین اشیاء کی ترتیبیں ان کی تعداد اجتماع کی ۶ گنی ہوتی ہیں -

$$۲۴ = ۴ \times ۳ = ۴۸$$

ترتیب و اجتماع کی بحث میں عام طور پر اس بات کا یاد رکھنا مفید ہوگا کہ مختلف اجتماع بنانے میں ہمارا تعلق صرف اس تعداد اشیاء سے ہوتا ہے جو کسی ایک انتخاب میں موجود ہو مگر ترتیب لگانے میں ترتیب اشیاء کا خاص لحاظ رکھنا پڑتا ہے مثلاً ا ب اور ب ا دو مختلف اجتماع نہیں ہیں مگر دو مختلف ترتیبیں ضرور ہیں -

۱۳۶ - اس باب کے عام مسئلوں پر بحث کرنے سے پہلے ہم

ایک اہم اصول کی تشریح کریں گے اور اس کی توضیح کے لیے چند عددی مثالیں دینگے۔

اگر ایک کام م طریقوں سے کیا جاسکتا ہے اور (جب یہ کام ان طریقوں میں سے کسی ایک طریقہ سے کر دیا جائے تو) ایک دوسرا کام ن طریقوں سے کیا جاسکتا ہے تو یہ دونوں کام م \times ن طریقوں سے کیے جاسکتے ہیں۔

اگر پہلا کام م طریقوں میں سے کسی ایک طریقہ سے کیا جائے تو ہم اس کے ساتھ دوسرا کام کرنے کے ن طریقوں میں سے کسی ایک کو منسلک کر سکتے ہیں۔ پس یہ دو کام کرنے کے ن طریقوں سے کیے جاسکتے ہیں، اگر ہم پہلا کام کرنے کے صرف ایک طریقہ پر غور کریں۔ اس لیے پہلا کام کرنے کے م طریقوں میں سے ہر ایک کے جواب میں دونوں کام کرنے کے ن طریقے ہیں۔ اس لیے دونوں کام کرنے کے کل طریقوں کی تعداد م \times ن ہے۔

مثال ۱۔ دس جہاز بمبئی اور کراچی کے درمیان آتے جاتے ہیں معلوم کرو کہ کتنی طرح سے ایک مسافر بمبئی سے کراچی جاسکتا ہے اور مختلف جہاز سے واپس آسکتا ہے۔

پہلے سفر کے ۱۰ طریقے ہیں اور ان میں سے ہر ایک کے مقابل واپس آنے کے ۹ طریقے ہیں (کیونکہ مسافر جس جہاز سے جائے اُسی سے واپس نہیں آسکتا)۔

اس لیے آنے جانے کے مختلف طریقے $90 = 9 \times 10$ ۔

یہ اصول اس صورت پر بھی حاوی ہے جہاں دو سے زیادہ عمل ہوں اور ان میں سے ہر ایک متعدد طریقوں سے ہو سکتا ہو۔

مثال ۲۔ کسی شہر میں ۳ مسافر آئے وہاں چار مسافر خانے تھے

اگر ان میں سے ہر ایک الگ مسافر خانے میں رہے تو معلوم کرو کہ

کتنے مختلف طریقوں سے وہ مختلف مسافر خانوں میں قیام کر سکتے ہیں۔

پہلا مسافر چار مسافر خانوں میں سے کسی ایک کو منتخب کر سکتا ہے اور جب اس نے اپنا انتخاب کسی ایک طریقے سے کر لیا تو دوسرا مسافر باقی تین میں سے کسی ایک کو منتخب کر سکتا ہے، معلوم ہوا کہ پہلے دو مسافر ۳×۴ طریقوں سے اپنی جائے قیام کا انتخاب کر سکتے ہیں اور ان میں سے کسی ایک انتخاب کے ساتھ تیسرا مسافر دو طرح سے اپنا مسافر خانہ منتخب کر سکتا ہے اس لیے مطلوبہ طریقے

$$۲۴ = ۳ \times ۴ \times ۲ =$$

۱۳۷۔ اگر ن مختلف اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کی ترتیبیں لگائی جائیں تو ان کی تعداد دریافت کرو۔

ن اشیاء کو ن حروف ا، ب، ج وغیرہ سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ ر خالی مقامات ہیں اور ان میں سے ہر ایک مقام کو ایک حرف سے پُر کرنا ہے۔

پہلا مقام ن طریقوں سے پُر ہو سکتا ہے کیونکہ ہم ن مختلف حروف میں سے کوئی سا ایک منتخب کر سکتے ہیں اور وہ پہلے مقام میں رکھا جاسکتا ہے۔ جب یہ کسی ایک طریقے سے پُر ہو گیا تو دوسرا مقام ن - ۱ طریقوں سے پُر ہو سکتا ہے اور چونکہ پہلے مقام کے پُر کرنے کا طریقہ دوسرے مقام کے پُر کرنے کے ہر ایک طریقے سے منسلک ہو سکتا ہے اس لیے پہلے دو مقام پُر کرنے کے کل طریقے ن (ن - ۱) ہیں۔ جب پہلے دو مقام پُر ہو گئے تو تیسرا مقام ن - ۲ طریقوں سے پُر ہو سکتا ہے اور پہلے تین مقام پُر کرنے کے کل طریقے ن (ن - ۱) (ن - ۲) ہیں۔

اسی طرح عمل کو جاری رکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ہر ایک نئے مقام کے پُر ہونے پر حاصل ضرب میں ایک نیا جزو ضربی داخل ہوتا ہے اور کسی خاص منزل پر اجزائے ضربی کی تعداد وہی ہے جو پُر کردہ مقامات کی ہے۔ اس سے ثابت ہوا کہ ر مقامات

پُر کرنے کے کل طریقے یعنی

ن ستر = $n(n-1)(n-2) \dots$ ر اجزائے ضربی تک

اور ر وال جزو ضربی = $n - (r-1) = n - r + 1$
اس لیے ن اشیاء میں سے ر اشیاء کی ترتیبوں کی تعداد یعنی

ن ستر = $n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$
نتیجہ صریح۔ اگر ن اشیاء میں سے سب اشیاء کی کھٹی ترتیبیں
لگائی جائیں تو ان ترتیبوں کی تعداد = $n(n-1)(n-2) \dots$
ن اجزائے ضربی تک۔

$n = n(n-1)(n-2) \dots 1 \times 2 \times 3$
اس حاصل ضرب کو (یعنی ایک سے لے کر ن تک تمام اعداد صحیح
کے حاصل ضرب کو) ن یا ن! سے تعبیر کرتے ہیں اسے ہم حاصل
ضربی ن یا اختصاراً "ضربی ن" کہینگے پس معلوم ہوا کہ

ن ستر = $n(n-1)(n-2) \dots 1 \times 2 = \underline{n!}$ یا ن!

نوٹ۔ عددی مثالیں حل کرنے میں اس بات کا خیال رکھنا مفید
ہوگا کہ علامت ستر میں حرف آخر (یعنی ر) سے حاصل ضرب کے
اجزائے ضربی کی تعداد تعبیر ہوتی ہے۔

۱۳۸۔ ن اشیاء میں سے ر اشیاء کی ترتیبوں کی تعداد
طریق ذیل سے بھی حاصل ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ ن اشیاء میں سے ر اشیاء کی کل ترتیبیں
ستر سے تعبیر ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ ہم ن اشیاء میں سے ر-۱ اشیاء کی کل
ترتیبیں لگاتے ہیں ان کی تعداد ستر-۱ ہوگی۔

اب ان میں سے ہر ایک ترتیب کے دائیں سرے پر باقی
ن-ر+۱ اشیاء میں سے ایک ایک شے کو باری باری رکھو ہر دفعہ ایسا کرنے سے

ہمیں n اشیاء میں سے r اشیاء کی ایک ترتیب حاصل ہوگی اور اس لیے
 n اشیاء میں سے r اشیاء کی کل ترتیبیں n ستر $(n - r + 1) \times$
 ہونگی۔

یعنی n ستر $= n$ ستر $\times (n - r + 1)$
 r کی جگہ $r - 1$ لکھنے سے

$$n$$
 ستر $= n$ ستر $\times (n - r + 2)$

اسی طرح سے n ستر $= n$ ستر $\times (n - r + 3)$

$$n$$
 ستر $= n$ ستر $\times (n - 2)$

$$n$$
 ستر $= n$ ستر $\times (n - 1)$

$$n$$
 ستر $= n$

ستونوں کو اکٹھا ضرب دیں اور متماثل ارقام کو طرفین سے خارج کریں تو
 حاصل ہوگا،

$$n$$
 ستر $= n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1)$

نتیجہ صریح - n ستر $= \frac{n!}{(n - r)!}$

کیونکہ n ستر $= n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1)$

$$= \frac{n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1) \times 1 \times 2 \times 3 \dots (n - r)}{1 \times 2 \times 3 \dots (n - r)}$$

$$= \frac{n!}{(n - r)!}$$

$$= \frac{n!}{(n - r)!}$$

مثال ۱۔ چار اشخاص ایک ریل کے ڈبہ میں جس میں ۶ نشستیں
 ہیں داخل ہوتے ہیں۔ بتاؤ کہ وہ کتنے طریقوں سے بیٹھ سکتے ہیں۔

پہلا شخص ۶ طریقوں سے بیٹھ سکتا ہے، دوسرا ۵ طریقوں سے، تیسرا ۴ طریقوں سے اور چوتھا ۳ طریقوں سے۔ اس لیے ان چار اشخاص کے بیٹھنے کے طریقوں کی تعداد

$$360 = 3 \times 4 \times 5 \times 6 =$$

مثال ۲۔ نو ہند سے ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ میں ان میں سے چھ چھ ہند سے لینے سے کتنے مختلف اعداد بن سکتے ہیں؟ یہاں نو مختلف اشیاء میں ان میں سے چھ چھ کی مختلف ترتیبیں معلوم کرنی ہیں اس لیے اعداد مطلوبہ کی تعداد = ۶! =

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$$

$$720 =$$

مثال ۳۔ کل ۷ گھنٹوں میں سے چار چار گھنٹے کتنی مختلف طرح سے بج سکتے ہیں اور ۷ گھنٹے سب کے سب اکٹھے کتنی مختلف طرح سے بج سکتے ہیں؟

چونکہ مختلف گھنٹوں کے بجنے سے مختلف آوازیں پیدا ہوتی ہیں اس لیے اگر انہیں مختلف ترتیبوں سے بجایا جائے تو ہر دفعہ ایک مختلف اور نئی مرکب آواز پیدا ہوگی۔

پس ۷ گھنٹوں میں سے چار چار گھنٹوں کے بجنے کے مختلف طریقوں کی تعداد = ۷! = ۷ × ۶ × ۵ × ۴ × ۳ × ۲ × ۱ = ۵۰۴۰ =

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 =$$

$$5040 =$$

مثال ۴۔ چھ ہندسوں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ میں سے کل کتنے اعداد بن سکتے ہیں جو ۳۰۰ اور ۴۰۰ کے درمیان واقع ہوں اور ۵ پر تقسیم ہو سکیں۔

چونکہ ہر ایک عدد ۳۰۰ اور ۴۰۰ کے درمیان واقع ہوتا ہے

اس لیے ظاہر ہے کہ اس کی بائیں جانب عدد ۳ ہے اور اس میں ۴ ہندسے شامل ہیں نیز چونکہ وہ ۵ پر پورا تقسیم ہوتا ہے اس لیے اکائی کی جگہ ۵ ہوتا چاہیے (کیونکہ دیے ہوئے ہندسوں میں صفر نہیں ہے)۔
پس معلوم ہوا کہ اعداد مجوزہ ایسے ہیں کہ ان میں اول اور آخر کے ہندسے معین ہیں صرف دو درمیانی مقامات کو ہندسوں ۴، ۶، ۷، ۸ سے پُر کرنا ہے اور ایسا کرنے کے کل طریقے = ۲ = ۱۲
مثال ۵۔ لفظ "متصاعدہ" کے حروف سے اور کتنے الفاظ بن سکتے ہیں؟

یہاں کل ۷ حروف ہیں یعنی م، ت، ع، ا، ع، و، ہ
اب چونکہ حروف کی مختلف ترتیبوں سے مختلف الفاظ پیدا ہوتے ہیں اس لیے مندرجہ بالا حروف سے جو الفاظ بن سکتے ہیں ان کی تعداد
= ۲ = ۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ۵ × ۶ × ۷ = ۵۰۴۰ =

اس لیے تعداد مطلوبہ = ۵۰۴۰ - ۱ = ۵۰۳۹
اب فرض کرو کہ ایسے حروف کی تعداد مطلوب ہے جن کے شروع میں ہمیشہ م ہوتا ہے اور آخر میں ۵۔

اس صورت میں م اور ہ کو اپنی اپنی جگہ قائم کرو اور باقی ۵ درمیانی حروف کو آپس میں ترتیب دو پس الفاظ کی تعداد مطلوبہ

= ۲ = ۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ۵ = ۱۲۰
مثال ۶۔ کتنے مختلف طریقوں سے 'حرف ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ع'، 'ف'، 'گ' آپس میں اس طرح پر ترتیب دیے جاسکتے ہیں کہ
(۱) ب اور ج ہمیشہ اکٹھے رہیں (۲) ب اور ج کبھی اکٹھے نہ ہوں۔
(۱) چونکہ ب اور ج ہمیشہ اکٹھے رہیں گے اس لیے ہم انہیں خطوط وحدانی کے اندر داخل کرتے ہیں جیسے (ب ج) اور چھ اشیاء 'ا'، 'د'، 'ع'، 'ف'، 'گ' کی مختلف ترتیبیں دریافت کرتے ہیں۔

ایسی ترتیبوں کی تعداد = پتہ

$$420 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 =$$

ان میں سے ہر ایک ترتیب میں حروف ب اور ج ترتیب ب ج میں پائے جاتے ہیں۔

اسی طرح سے ۴۲۰ ترتیبیں ایسی ہیں جن میں حروف مذکورہ کی ترتیب ج ب ہے پس معلوم ہوا کہ کل ترتیبوں کی تعداد جن میں ب اور ج ہمیشہ متصل ہیں 420×2 یا ۸۴۰ ہے۔

(۲) فرض کرو کہ ان ترتیبوں کی جن میں حروف ب اور ج اکٹھے نہیں ہیں لا ہے اور ان ترتیبوں کی تعداد جن میں وہ اکٹھے ہیں ما ہے۔

تب صریحاً لا + ما = پتہ

اور بموجب حصہ (۱) ما = ۲ پتہ

اس لیے لا = پتہ - ۲ پتہ

$$= 420 - 2 \times 420$$

$$= (420 - 840)$$

$$= 420 \times 5 =$$

$$3400 =$$

اس لیے ان ترتیبوں کی تعداد جن میں ب اور ج اکٹھے نہیں ہوتے ۳۴۰۰ ہے۔

۱۳۹۔ ان اشیاء میں سے ر کے اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ان اشیاء میں سے ر کے اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد پتہ سے تعبیر ہوتی ہے۔

اب ان میں سے ہر ایک اجتماع ایسی مختلف اشیاء کا مجموعہ ہے جو آپس میں الے طریقوں سے ترتیب دی جاسکتی ہیں۔

اس لیے $n \times r = n$ اشیاء میں سے r اشیاء کی ترتیبوں کی تعداد

یعنی $n \times r = n$ ہوتا ہے

$$n = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$$

$$n \times r = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{r!}$$

نتیجہ صریح۔ $n \times r$ کا مضابطہ ایک مختلف صورت میں بھی لکھا جاسکتا ہے۔
کیونکہ اگر ہم شمار کنندہ اور منب نما دونوں کو $n-r$ سے ضرب دیں تو
حاصل ہوگا۔

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{r!} \times (n-r)$$

شمار کنندہ میں اب ایک سے لیکر $n-r$ تک کے کل طبعی اعداد شامل ہیں
اس لیے

$$n \times r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (2)$$

بہتر ہوگا کہ طالب علم $n \times r$ کی قیمت کی دونوں صورتیں (۱) اور
(۲) یاد رکھے اور نتیجہ (۱) کو اس وقت استعمال کرے جب عددی جواب
مطلوب ہو اور (۲) کو اس وقت استعمال کرے جب سوال کو صرف
صورت جبریہ میں ختم کرنا کافی ہو۔

نوٹ۔ اگر نتیجہ (۲) میں فرض کیا جائے کہ $r = n$ تو

$$n \times n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1} = n!$$

لیکن $n \times n = 1$ اس لیے اگر نتیجہ اس صورت میں صحیح ہو جب کہ $r = n$
تو علامت $n!$ کو ایک کے مساوی خیال کرنا چاہیے۔

مثال ۱۔ اگر $n = 2$ اشیاء میں سے تین تین اشیاء کے اجتماعوں کی

تعداد n اشیاء میں سے دو دواشیاء کے اجتماعوں کی تعداد کی لاگتی
ہوتوں کی قیمت دریافت کرو۔

$$\text{چونکہ } \frac{n(n+1)(n+2)}{3 \times 2 \times 1} = {}^{n+2}C_3$$

$$\text{اور } \frac{n^2}{2 \times 1} \left(1 - \frac{n}{3}\right) = {}^{n/2}C_2$$

اس لیے بموجب شرائط سوال

$$\frac{(n^2 - n^2/3) \times 11}{9 \times 2 \times 1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3 \times 2 \times 1}$$

$$\text{یا } 3(n+2)(n+1) = 22(n^2 - n^2/3)$$

$$\text{یا } 3n^2 - 2n = 35n - 22$$

$$\text{یا } (n-4)(n-3) = 0$$

$$\text{اس لیے } n = 4$$

چونکہ تعداد اشیاء کم از کم ہو سکتی اس لیے n کی دوسری قیمت
نامقابل قبول ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ ${}^{n+2}C_3 : {}^{n/2}C_2$

$$= \frac{{}^{n+2}C_3}{{}^{n/2}C_2} = \frac{(n+2)(n+1)n}{3 \times 2 \times 1} \div \frac{n^2}{2 \times 1} \left(1 - \frac{n}{3}\right)$$

$$\text{چونکہ } \frac{{}^{n+2}C_3}{{}^{n/2}C_2} = \frac{(n+2)(n+1)n}{3 \times 2 \times 1} \div \frac{n^2}{2 \times 1} \left(1 - \frac{n}{3}\right)$$

$$\text{اس لیے نسبت مطلوبہ} = \frac{(n+2)(n+1)n}{3 \times 2 \times 1} \div \frac{n^2}{2 \times 1} \left(1 - \frac{n}{3}\right)$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{3} \times \frac{2}{n} \left(1 - \frac{n}{3}\right)$$

$$\text{اب } (n) = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

$$\{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n\} \times \{(1-n) \times 2 \times 3 \times \dots \times n\} =$$

$$\{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n\} \times \{(1-n) \times 2 \times 3 \times \dots \times n\} =$$

$$\text{اس لیے } \frac{(n)}{(1-n)} = \{(1-n) \times 2 \times 3 \times \dots \times n\} \times \{(1-n) \times 2 \times 3 \times \dots \times n\} \quad (1)$$

$$\text{نیز } (n) = \{(1-n) \times 2 \times 3 \times \dots \times n\} \times \{(1-n) \times 2 \times 3 \times \dots \times n\} =$$

$$\{(1-n) \times 2 \times 3 \times \dots \times n\} \times \{(1-n) \times 2 \times 3 \times \dots \times n\} =$$

$$\text{اس لیے } \frac{(n)}{(1-n)} = \{(1-n) \times 2 \times 3 \times \dots \times n\} \times \{(1-n) \times 2 \times 3 \times \dots \times n\}$$

$$\text{اور اس لیے } \left\{ \frac{(n)}{(1-n)} \right\} = \frac{1}{\{(1-n) \times 2 \times 3 \times \dots \times n\} \times \{(1-n) \times 2 \times 3 \times \dots \times n\}}$$

$$\text{اس لیے (1) اور (2) سے نسبت مطلوبہ } = \frac{(1-n) \times 2 \times 3 \times \dots \times n}{\{(1-n) \times 2 \times 3 \times \dots \times n\} \times \{(1-n) \times 2 \times 3 \times \dots \times n\}}$$

۱۴۰۔ ن اشیاء میں سے ر اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد وہی ہوگی

جو انہی اشیاء میں سے ن۔ ر۔ ن اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد ہے۔

ن اشیاء میں سے ر اشیاء کے کل ممکن اجتماع بنانے میں جب ہم ر اشیاء کا کوئی ایک مجموعہ منتخب کرتے ہیں تو اس کے مقابل ن۔ ر اشیاء کا ایک مجموعہ باقی رہتا ہے یعنی ن اشیاء میں سے ر۔ ر اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد وہی ہے جو ن اشیاء میں سے ن۔ ر۔ ن اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد ہے۔

$$\therefore \text{ن} = \text{ن} - \text{ن}$$

اس مسئلہ کو ہم اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

$$\frac{\text{ان}}{\text{ان} - \text{ر}} = \frac{\text{ان} - (\text{ان} - \text{ر})}{\text{ان} - \text{ر}} \quad [\text{وفہ ۱۳۹}]$$

$$\frac{\text{ان}}{\text{ان} - \text{ر}} = \frac{\text{ان}}{\text{ان} - \text{ر}} = \text{ن ج}$$

ایسے اجتماعوں کو متمم اجتماع کہتے ہیں۔

نوٹ (۱) چونکہ $\text{ن ج} = \text{ن ج} - \text{ن ج} = ۱$

(۲) نتیجہ $\text{ن ج} = \text{ن ج} - \text{ر ج}$ جو ہم نے ابھی ثابت کیا ہے حسابی عمل کے

مختصر کر دینے میں نہایت کار آمد ہے۔

مثال ۱ - $\text{ن ج} = \text{ن ج} - \text{ن ج}$ کی قیمتیں دریافت کرو۔

$$\frac{۹ \times ۱۰ \times ۱۱ \times ۱۲}{۲ \times ۳ \times ۴ \times ۱} = \text{ن ج}_{۱۲} = \text{ن ج}_{۱۲} - ۸ = ۸$$

$$۲۹۵ = ۹ \times ۵ \times ۱۱ =$$

$$\frac{۲۳ \times ۲۴ \times ۲۵}{۳ \times ۴ \times ۱} = \text{ن ج}_{۲۵} = \text{ن ج}_{۲۵} - ۲۲ = ۲۲$$

مثال ۲ - اگر $\text{ن ج} = \text{ن ج} - \text{ن ج}$ اور $\text{ن ج} = ۲۳۰۰$ کی قیمتیں دریافت کرو۔

$$\text{چونکہ } \text{ن ج} = \text{ن ج} - \text{ن ج} \therefore \text{ن ج} = ۱۶ + ۱۴ = ۳۰$$

$$\text{اس لیے } \text{ن ج} = \text{ن ج} - \text{ن ج} = \frac{۲۹ \times ۳۰}{۲ \times ۱} = ۲۳۵$$

$$\text{اور } \text{ن ج} = \text{ن ج} - \text{ن ج} = \frac{۳۱ \times ۳۲}{۴ \times ۱} = ۲۹۶$$

مثال ۳ - اگر $\text{ن ج} = \text{ن ج} + ۱$ اور اگر ان میں سے ہر ایک کی

نسبت ۵:۴ سے ۴:۵ ہوتوں کی قیمت دریافت کرو۔

چونکہ $n_j = n_r + 1 = n_j$

اس لیے $2 + 1 = 3$ (۱)

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \text{ اور } \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$

اس لیے بموجب شرائط سوال

$$\frac{1+r-n}{r} = \frac{n}{r} : n = \frac{r}{r-1}$$

$$= \frac{2+2}{2} \text{ بموجب (۱)}$$

جس سے $۲ = ۸$ اور اس لیے $۱ = ۲ + ۱ = ۳$

۱۴۱۔ جب ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے ایسے اجتماع مطلوب

ہوں جن میں سے ہر ایک اجتماع میں ایک خاص شے شامل ہوتی ہیں

اُس شے کو علیحدہ نکال کر باقی ماندہ ن - ۱۱ اشیا میں سے ر - ۱۱ ر - ۱

اشیا کے مختلف اجتماع بنانے یا ہمیں اور پھر مرا ایک ایسے اجتماع میں

اس خاص شے کو شامل کر دینا چاہیے۔

پس معلوم ہوا کہ ان اشیاء میں سے رہبر اشیاء کے اُن اجتماعوں

کی تعداد جن میں سے ہر ایک میں ایک خاص شے ہمیشہ شامل

ہوتی ہے۔

11-2

مثال ۱۔ ایک تاش کی بازی لگانے کے لئے ۱۰ مردوں میں

سے چھ چھ کی مختلف جماعتیں مطلوب ہیں علوم کر دک یہ عمل کتنی طرح سے

ہو سکتا ہے -

$$۶۱۰ = \frac{۷ \times ۸ \times ۹ \times ۱۰}{۲ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۶۱۰ = ۶ج = ۶ج$$

اس تعداد میں کتنے انتخاب ایسے ہیں جن میں ایک خاص آدمی شامل

ہوگا؟
اُسے علیحدہ کر دیا باقی ۹ مردوں میں سے پانچ پانچ کی مختلف جماعتیں
بناؤ اور پھر انہیں اس کو ہر ایک جماعت میں شامل کر دو -
ایسی جماعتوں کی تعداد = ۹ج = ۹ج

$$۱۲۶ = \frac{۶ \times ۷ \times ۸ \times ۹}{۲ \times ۳ \times ۲ \times ۱} =$$

ان میں کتنے انتخاب ایسے ہیں جن میں ایک خاص آدمی شامل

نہیں ہوگا؟
اُسے علیحدہ کر دیا باقی ۹ میں سے چھ چھ کی جماعتیں بناؤ

$$۸۴ = \frac{۷ \times ۸ \times ۹}{۳ \times ۲ \times ۱} = ۸۴ = ۷ج = ۷ج$$

مثال ۲ — کل ۲ کتابوں میں سے پانچ پانچ کتابیں کتنی طرح
سے منتخب ہو سکتی ہیں جبکہ ہر ایک صورت میں (۱) ایک خاص کتاب ہمیشہ
شامل کی جائے (۲) ایک خاص کتاب ہمیشہ خارج کی جائے -
(۱) چونکہ ہر ایک انتخاب میں کتاب مختص شامل ہوگی اس لیے ہمیں گیارہ کتابوں
میں سے صرف چار چار کتابیں منتخب کرنی ہیں -

$$۳۳۰ = \frac{۸ \times ۹ \times ۱۰ \times ۱۱}{۲ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۳۳۰ = ۱۱ج = ۱۱ج$$

(۲) چونکہ کتاب مختص ہمیشہ خارج کی جائیگی اس لیے ہمیں ۱۱ کتابوں میں سے
پانچ پانچ کتابیں منتخب کرنی ہیں اس لیے مطلوبہ طریقوں کی تعداد

$$۲۵۲ = \frac{۷ \times ۸ \times ۹ \times ۱۰ \times ۱۱}{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۲۵۲ = ۱۱ج =$$

۱۴۲ — امثلہ ذیل میں یہ بات قابل توجہ ہے کہ ترتیب لگانے کے قاعدہ کو استعمال نہیں کرنا چاہیے جب تک کہ مناسب اجتماع ہو جب شرائط سوال مرتب نہ ہو جائیں۔

مثال ۱ — ۵ ہندوستانیوں اور ۵ انگریزوں میں سے ۷ کی ایک کمیٹی بنانی سے معلوم کرو کہ یہ کتنے مختلف طریقوں سے ہو سکتا ہے جبکہ کمیٹی میں (۱) صرف ۲ انگریز ہوں (۲) کم از کم دو انگریز ہوں۔
(۱) کمیٹی میں دو انگریز اور اس لیے ۵ ہندوستانی ہونگے۔
اب ۵ ہندوستانیوں میں سے ۵ ہندوستانی منتخب کرنے کے طریقوں کی تعداد

اور ۵ انگریزوں میں سے ۲ انگریز منتخب کرنے کے طریقوں کی تعداد

چونکہ کمیٹی بنانے میں ہر ایک ہندوستانی گروہ ہر ایک انگریز گروہ سے منسلک ہو سکتا ہے اس لیے کمیٹی بنانے کے کل طریقے۔

$$= ۵۶ \times ۵۶$$

$$= \frac{۲ \times ۵}{۲ \times ۱} \times \frac{۶ \times ۴ \times ۸}{۳ \times ۲ \times ۱}$$

$$= ۱۰ \times ۵۶ = ۵۶۰$$

(۲) کمیٹی میں ۲، ۳، ۴، ۵ انگریز ہو سکتے ہیں اس لیے یہیں چار مختلف صورتوں پر غور کرنا چاہیے :-

صورت اول - کمیٹی میں ۲ انگریز اور ۵ ہندوستانی ہیں۔
صورت دوم - ۳ انگریز اور ۳ ہندوستانی ہیں۔
صورت سوم - ۴ انگریز اور ۲ ہندوستانی ہیں۔
صورت چہارم - ۵ انگریز اور ۱ ہندوستانی ہیں۔

اب بموجب حصہ (۱) پہلی صورت میں کمیٹی بنانے کے مختلف طریقے

$= ۸ج_۲ \times ۸ج_۲$ دوسری صورت میں $= ۸ج_۳ \times ۸ج_۲$ تیسری صورت

میں $= ۸ج_۴ \times ۸ج_۲$ اور چوتھی صورت میں $= ۸ج_۵ \times ۸ج_۲$

اس لیے تعداد مطلوبہ $= (۸ج_۱ \times ۸ج_۲) + (۸ج_۲ \times ۸ج_۲)$

$+ (۸ج_۳ \times ۸ج_۲) + (۸ج_۴ \times ۸ج_۲)$

$= (۸ج_۲ \times ۸ج_۲) + (۸ج_۲ \times ۸ج_۳) + (۸ج_۲ \times ۸ج_۴) + (۸ج_۲ \times ۸ج_۵)$

$= \left(\frac{۵ \times ۶ \times ۷ \times ۸}{۲ \times ۳ \times ۴ \times ۱} \times \frac{۲ \times ۵}{۲ \times ۱} \right) + \left(\frac{۶ \times ۷ \times ۸}{۳ \times ۲ \times ۱} \times \frac{۲ \times ۵}{۲ \times ۱} \right) =$

$+ \left(\frac{۷ \times ۸}{۲ \times ۱} \right) + \left(\frac{۶ \times ۷ \times ۸}{۳ \times ۲ \times ۱} \times ۵ \right) +$

$۲۸ + ۲۸۰ + ۷۰۰ + ۵۶۰ =$

$۱۵۶۸ =$

مثال ۲ — ایک کشتی کے ۸ ملاح ہیں ان میں سے ۳ صرف

ایک طرف چھو چلا سکتے ہیں اور ۲ صرف دوسری طرف، معلوم کرو کہ کشتی میں ان کی کشتیں کتنی طرح سے ترتیب دی جاسکتی ہیں۔

فرض کرو کہ ملاح ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ ہیں نیز فرض کرو کہ ۱، ۲، ۳ ہمیشہ ایک طرف اور ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ ہمیشہ دوسری طرف رہتے ہیں جیسا کہ ترتیب ذیل سے ظاہر ہے۔

۱

۲

۳

اب ضروری ہے کہ دونوں طرف چار چار ملاح ہوں باقی تین میں سے ایک کو ۱، ۲، ۳ کی طرف بٹھانا چاہیے اور دوسرے دو کو ۴، ۵، ۶ کی طرف۔

ظاہر ہے کہ یہ عمل تین طرح سے ہو سکتا ہے کیونکہ ہم کسی ایک کو
 د، ب، ج کی طرف بٹھا سکتے ہیں۔
 البتہ تینوں طریقوں میں سے فی الحال ایک پر غور کرو۔ یعنی جب ف کو
 د، ب، ج کی طرف بٹھایا جائے دیکھو ترتیب ذیل

د	د
ع	ب
گ	ج
ہ	ف

اب د، ب، ج، ف آ پس میں لکے طرح سے ترتیب دیے جاسکتے
 ہیں اور صحیحاً ان میں سے ہر ایک ترتیب کے مقابل د، ع، گ، ہ
 کو آ پس میں ترتیب دینے کے لکے طریقے ہیں اس لیے اس
 صورت میں ملاحوں کو ترتیب دینے کے کل طریقوں کی تعداد

$$= ۴ \times ۴$$

اسی طرح سے دوسری دو صورتوں میں سے ہر ایک کے مقابل
 ملاحوں کو آ پس میں ترتیب دینے کے ۴×۴ طریقے ہیں۔
 اس لیے ملاحوں کو آ پس میں ترتیب دینے کے کل مختلف طریقے

$$= ۳ \times ۴ \times ۴$$

$$= ۳ \times ۲۴ \times ۲۴$$

$$= ۱۶۲۸$$

مثال ۳۔۔۔ ۱۰ حروف صحیح اور ۴ حروف علت میں سے کتنے
 ایسے الفاظ بن سکتے ہیں جن میں سے ہر ایک میں ۳ حروف صحیح اور ۲ حروف
 علت شامل ہوں۔

۱۰ حروف صحیح میں سے تین تین حروف کے اجتماعوں کی تعداد = ۲۱۰
 ۴ حروف علت میں سے دو دو حروف کے اجتماعوں کی تعداد = ۶
 اب پہلی قسم کے ہر ایک مجموعہ کو دوسری قسم کے ہر ایک مجموعہ کے

ساتھ اکٹھا کرنے سے ہمیں ج_۳ ج_۲ ج_۱ اجتماع حاصل ہوتے ہیں جن میں سے ہر ایک میں ۳ حرف صحیح اور ۲ حرف علت شامل ہیں۔
اب ان میں سے ہر ایک مجموعہ میں ۵ مختلف حروف ہیں جو آپس میں ۱۵ طرح کے ترتیب دیے جاسکتے ہیں۔

اس لیے الفاظ کی تعداد مطلوبہ = ج_۳ × ج_۲ × ج_۱ × ۱۵

$$= ۱ \times \frac{۳ \times ۲}{۲ \times ۱} \times \frac{۸ \times ۹ \times ۱۰}{۳ \times ۲ \times ۱} =$$

$$= ۱۵ \times ۶ \times ۱۲۰ =$$

$$= ۱۲۰ \times ۶۲۰ =$$

$$= ۸۶۴۰۰ =$$

مثال ۲۔ اگر ن اشیا دیں سے ر، ر اشیا کی ترتیبیں لگائی جائیں تو معلوم کرو کہ کتنی ترتیبوں میں تین اشیا کے معینہ شامل ہونگی۔
سب سے پہلے ہم ن اشیا دیں سے ر، ر اشیا کے ایسے اجتماعوں کی تعداد دریافت کریں گے جن میں سے ہر ایک اجتماع میں تینوں اشیا کے معینہ شامل ہوں۔

ظاہر ہے کہ اگر ہم ایک ایسا اجتماع بنائیں جس میں تینوں اشیا کے مذکورہ شامل ہوں تو اس میں اور ۲ اشیا بھی موجود ہونگی جو باقی ماندہ ن - ۳ اشیا میں سے منتخب کی گئی ہیں۔ پس معلوم ہوا کہ ر اشیا کے ایسے اجتماع جن میں تینوں اشیا موجود ہوں اتنے ہونگے جتنے کہ ن - ۳ اشیا میں سے ر - ۳، ر - ۳ اشیا کے اجتماع ہیں۔

$$\text{یعنی اجتماعوں کی تعداد مطلوبہ} = \text{ن - ۳} \times \text{ن - ۳} = \frac{\text{ن - ۳}}{۱} \times \frac{\text{ن - ۳}}{۱} =$$

لیکن ان میں سے ر، ر اشیا کا ہر ایک مجموعہ آپس میں ۱۵ طرح سے

ترتیب دیا جاسکتا ہے پس کل ترتیبوں کی تعداد جن میں تینوں اشیاء معینہ شامل ہیں -

$$= \frac{n-3}{n-2} \times \frac{n-3}{n-1}$$

$$= \frac{n-3}{n-2} \times (n-2)(n-1) = n-3$$

۱۴۳۔ اگر ن اشیاء کے مختلف پارسل بنانے مطلوب ہوں تو اس سوال کا حل ضابطہ متعلقہ درج سے حاصل ہو سکتا ہے۔
فرض کرو کہ ن اشیاء کے ایسے دو پارسل بنانے مطلوب ہیں جن میں سے پہلے میں ر اشیاء اور دوسرے میں باقی ن۔ ر اشیاء شامل ہوتی ہیں۔

پہلے پارسل کی ر اشیاء منتخب کرنے کے کل طریقے درج ہیں اور ظاہر ہے کہ جب ہم ر اشیاء کا ایک اجتماع بناتے ہیں تو ن۔ ر اشیاء کا ایک اجتماع باقی رہتا ہے اور وہ دوسرے پارسل کی تعداد اشیاء ہے پس معلوم ہوا کہ دونوں پارسل بنانے کے کل طریقوں کی تعداد وہی ہے جو پہلے پارسل کی ر اشیاء منتخب کرنے کی تعداد ہے۔

$$\text{اس لیے مطلوبہ طریقوں کی تعداد} = \text{درج} = \frac{n}{n-1}$$

اگر ل + م اشیاء کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرنا مطلوب ہو یا ان کے ایسے دو پارسل بنانے ہوں جن میں بالترتیب ل اور م اشیاء شامل ہوں تو ایسا کرنے کے کل طریقے = $\frac{l+m}{l}$ (۱)

اگر ل + م + ن اشیاء میں سے تین ایسے اجتماع یا پارسل بنانے مطلوب ہوں جن میں بالترتیب ل، م، ن اشیاء شامل ہوں تو سب سے

اول ہم انھیں ایسے دو حصوں میں تقسیم کر سکتے ہیں جن میں بالترتیب
ل اور م + ن اشیا شامل ہوں (۱) کے ظاہر ہے کہ ایسا کرنے سے

کل طریقوں کی تعداد $\frac{ل + م + ن}{ل}$ ہے، اسی طرح سے م + ن اشیا

کے دو پارسل جن میں جداگانہ م اور ن اشیا شامل ہوں $\frac{ل + م + ن}{م}$

طرح سے بن سکتے ہیں اس لیے ل + ن اشیا میں سے بالترتیب
ل، م، ن اشیا کے تین پارسل بنانے کے کل طریقے

$$= \frac{ل + م + ن}{ل} \times \frac{ل + م + ن}{م}$$

$$= \frac{ل + م + ن}{ل م}$$

ل + م اشیا کے دو پارسل بنانے میں وہ صورت جبکہ ل = م قابل غور

ہے یہاں ضابطہ $\frac{ل + م}{ل م}$ سے صحیح جواب حاصل نہیں ہوتا۔

مثلاً ایک سادہ صورت پر غور کرو جہاں دو دو اشیا کے پارسل
بنانے کے لیے ۴ اشیا، ب، ج، د اس طرح تقسیم کی گئی ہیں
یعنی

ا ب اور ج د
ا ج ب د
ا د ب ج
ب ج ا د

ب و اور ل ج

ج د و ل ب

ہیں ضابطہ ہج سے معلوم ہے کہ اس قسم کی تقسیم کے $\frac{لک}{۲۱۲}$ یعنی

۶ طریقے ہیں لیکن ہر ایک طریقہ دو دفعہ تکرار پاتا ہے پس معلوم ہوا کہ مطلوب مختلف طریقوں کی تعداد مندرجہ بالا کا نصف ہے۔

اسی طرح سے جب ۲ اشیاء کے ایسے دو پارسل بنانے ہوں جن میں سے ہر ایک پارسل میں ل اشیاء شامل ہوں تو ایسا

کرنے کے کل طریقے $\frac{ل۲}{ل۲}$ ، اس میں پارسلوں کی ترتیب

میں کچھ امتیاز نہیں کیا گیا ہے۔ اگر پارسلوں کی ترتیب میں امتیاز کیا جائے اور یہی پارسل دو اشخاصوں کو دیے جائیں تو ایسا کرنے کے

کل طریقے $\frac{ل۲}{ل۲}$ ہونگے۔

اسی طرح سے اگر ضابطہ $\frac{ل۲+م+ن}{ل۲}$ میں ل = م = ن رکھیں

تو حاصل ہوگا $\frac{ل۳}{ل۳}$ ، اس میں تین پارسلوں کی مختلف ترتیبوں میں امتیاز

کیا گیا ہے۔ اگر ان تین پارسلوں کی ترتیب میں امتیاز نہ کیا جائے تو ۳ اشیاء میں سے ل، ل اشیاء کے تین پارسل بنانے کے مختلف طریقوں کی تعداد

$$\frac{ل۳}{ل۳} =$$

مثال ۱۔ — خطوط میں سے چھ چھ اور چار چار کے دو پارسل

کتنی طرح سے بن سکتے ہیں ؟

$$\text{مطلوبہ طریقوں کی تعداد} = \frac{10!}{1! \cdot 9!} = 10$$

کتنی طرح سے ۱۰ خطوط دو شخصوں میں اس طرح تقسیم ہو سکتے ہیں کہ کسی ایک کو دیے جائیں اور ۴ دوسرے کو ؟
۶ خطوط کے دو پارسل جب ایک دفعہ بن جائیں تو وہ دو شخصوں میں ۲ طریقوں سے تقسیم ہو سکتے ہیں۔

$$\text{اس لیے مطلوبہ طریقوں کی تعداد} = \frac{10!}{1! \cdot 9!} = 10$$

مثال ۲ — ۵ خطوط میں سے پانچ پانچ کے تین پارسل کتنی مختلف طرح سے بن سکتے ہیں جب پارسلوں کی ترتیب کو ملحوظ نہ رکھا جائے ؟

$$\text{مطلوبہ طریقوں کی تعداد} = \frac{15!}{5! \cdot 5! \cdot 5!} \times \frac{1}{3!}$$

اگر ۵ خطوط میں سے پانچ پانچ خطوط تین مختلف مکانوں پر دینے مطلوب ہوں تو اس صورت میں طریقوں کی تعداد = پانچ پانچ خطوط کے پارسل بنانے کی ۳ گنی = $\frac{15!}{3! \cdot 5! \cdot 5!}$

امثلہ نمبر کی ۱۱

۱ — ۵ حرف ا، ب، ج، د، ع میں سے چار چار حرف کی ایسی ترتیبیں مفصل لکھو جن میں ا حرف اول ہو اور ان کی تعداد دریافت کرو۔

۲ — ۵ حرف ا، ب، ج، د، ع کی وہ سب ترتیبیں مفصل لکھو

جن میں ا حرف اول ہو اور ع حرف آخر یا برعکس اس کے۔ نیز ان کی تعداد دریافت کرو۔

۳ — حاصل ضرب (۱-ن) (۲-ن) (۶-ن) میں کل

اجزاء اُسے ضربی کی تعداد اور یافت کرو۔

۴۔ حاصل ضرب "ن (ن - ۱) (ن - ۲) (ن - ۳)....." راجزائے
ضرعی تک۔" میں سب سے اخیر کا جزو ضرعی دریافت کرو۔

۵۔ اگر نسبت = $\frac{3}{2}$ ان ستہ تون کی قیمت دریافت کرو۔

۶ — ثابت کرد که $\frac{1}{n+1} r^n = \frac{1}{n} r^n + r^{n+1}$

۷۔ کسی لفظ میں ۴۲ حروف علت اور ۳ حروف صحیح شامل ہیں کتنی طرح سے ایک حرف علت اور ایک حرف صحیح ان میں سے اکٹھے منتخب ہو سکتے ہیں۔

۸۔ استہجہ ج ۱۹ ج کی قیمتیں دریافت کرو۔

۹۔ اگر ن اشیا میں سے تین تین اشیا کی ترتیبوں کا چار گن
ن۔ اشیا میں سے تین تین اشیا کی ترتیبوں کے ۵ گنے کے برابر ہو
تو ان کی قیمت دریافت کرو۔

۱۰۔ ”احد عشرہ“ کے حروف سے کل کتنی ترکیبیں بن سکتی ہیں اور ان میں سے کتنی ۱ سے شروع اور ۲ پر ختم ہونگی ؟

۱۱۔ ہند سے ۳، ۴، ۵، ۸، ۱۰ دلیے ہوئے ہیں ان میں سے چار چار ہند سے لینے سے کتنے مختلف اجتماع بن سکتے ہیں اور اگر ان میں سے چار چار ہند سے لے کر مختلف اعداد بنائے جائیں تو ان کی تعداد کیا ہوگی؟

۱۲۔ اگر ج:ج = ۴:۳ تو ن کی قیمت دریافت کرو۔

۱۳ — ہ گھنٹوں میں سے سب کے سب اکٹھے بننے سے

۱۲۔ گھنٹے سب کے سب اکٹھے کتنی مختلف طرح سے بچ سکتے ہیں اگر سب سے اونچی آواز سب سے آخر ہو ۛ

۱۵۔ کتنی راتوں کو ۲۴ — پاپیوں میں سے چار آدیوں کے

مختلف پرے لگ سکتے ہیں اور ان میں سے کتنے پہروں میں

ایک خاص آدمی شامل ہوگا ؟
 ۱۶۔ اگر ت اور ق ہمیشہ اکٹھے رہیں تو معلوم کرو کہ لفظ "منتقاریہ" کے حروف آپس میں کل کتنی طرح سے ترتیب دیے جاسکتے ہیں۔
 ۱۷۔ کسی قصبہ کی کونسل میں ۲۵ مشیر اور ۱ جاگیردار ہیں تو معلوم کرو کہ ان میں سے کل کتنی کمیٹیاں بن سکتی ہیں جبکہ ہر ایک کمیٹی میں ۵ مشیر اور ۳ جاگیردار ہوں۔

۱۸۔ کل چھ انگریزی حروف ہیں، تین بڑے چھاپے کے اور تین چھوٹے کے ان ترتیبوں کی تعداد دریافت کرو جو (۱) بڑے حرف سے شروع ہوں۔ (۲) جو بڑے حرف سے شروع اور ختم ہوں۔
 ۱۹۔ ۵۰ اشیاء میں سے ۴۶، ۴۶ اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد دریافت کرو۔
 ۲۰۔ اگر n ج = n ج تو n ج اور n ج کی قیمتیں دریافت کرو۔
 ۲۱۔ کتنی طرح سے لفظ "مجاولہ" کے حروف آپس میں ترتیب دیے جاسکتے ہیں اگر ج اور د ہمیشہ طاق مقامات میں رہیں۔

۲۲۔ ۴ افسر اور ۸ سپاہی ہیں، ان میں سے چھ چھ کی جماعتیں کتنی مختلف طرح سے منتخب ہو سکتی ہیں اگر ہر ایک جماعت میں (۱) صرف ایک افسر ہو (۲) کم از کم ایک افسر ہو۔
 ۲۳۔ ۱۰ اشخاصوں میں سے چار یا زیادہ اشخاص کی ایک جماعت کتنی طرح سے منتخب ہو سکتی ہے ؟

۲۴۔ اگر n ج = n ج تو n ج کی قیمت دریافت کرو۔
 ۲۵۔ کسی ریلوے لائن پر ۱۱ اسٹیشن ہیں، کل ٹکٹوں کی تعداد دریافت کرو تاکہ ہر ایک اسٹیشن پر ایک مسافر کو باقی تمام اسٹیشنوں کے ٹکٹ مل سکیں۔

۲۶۔ ٹینس کے کھلاڑی ۶ انگریز اور ۵ ہندوستانی ہیں اگر ہر ایک طرف ایک انگریز اور ایک ہندوستانی اکٹھے کھیلیں تو

معلوم کرو کہ ایک ٹینس کی بازی کھیلنے کے لیے انتخاب کتنی طرح سے ہو سکتا ہے۔

۲۷ — ۲۵ حرف صحیح اور ۵ حرف علت ہیں سے کل کتنے الفاظ بن سکتے ہیں جبکہ ہر ایک لفظ میں ۳ حرف علت اور ۲ صحیح ہوں؟

۲۸ — ایک کتب خانہ میں ۲۰ لاطینی اور ۶ یونانی کتا ہیں ہیں اگر ان میں سے ۵ کتا ہیں منتخب کی جائیں جن میں تین لاطینی اور دو یونانی ہوں تو بتاؤ کہ ان کو منتخب کرنے اور ایک الماری کے خانے میں ترتیب دینے کے کل کتنے طریقے ہو سکتے ہیں؟

۲۹ — کتنی طرح سے ۱۲ اشیا ۴ شخصوں میں برابر تقسیم ہو سکتی ہیں؟

۳۰ — تین بڑے چھالے کے حرف، ۵ حرف صحیح اور ۴ حرف علت ہیں سے ایسے الفاظ بنانے مطلوب ہیں جو بڑے حرف سے شروع ہوں اور جن میں سے ہر ایک میں ۲ حرف علت اور ۳ حرف صحیح شامل ہوں، الفاظ کی تعداد دریا فست کرو۔

۳۱ — کسی ممبری کے انتخاب پر ۱، ۱۵، ۲۰ آدمیوں کو بالترتیب تین اضلاع سے اظہار رائے کی درخواست کرنی ہے اگر کل امیدوار ۴۵ ہوں تو معلوم کرو کہ ان کی تقسیم مختلف اضلاع میں کل کتنی طرح سے ہو سکتی ہے۔

۳۲ — ایک کشتی کے ۸ ملاح ہیں ان میں سے ۲ صرف ایک طرف چوچلا سکتے ہیں اور ایک صرف دوسری طرف تو معلوم کرو کہ کشتی میں ملاح کتنی طرح سے ترتیب دیے جاسکتے ہیں۔

۳۳ — کتنی طرح سے ۱۰ امتحان گے پرچے اس طرح ترتیب دیے جاسکتے ہیں کہ سب سے اچھا پرچہ سب سے بُرے پرچے کے ساتھ کبھی اکٹھا نہ ہو؟

۳۴ — ایک آٹھ چوکشتی کے ملاحوں کو ایسے ۱۱ اشخاص سے

۳۵۔ ثابت کرو کہ مثبت اور منفی علامات جبر یہ کو ایک قطار میں ترتیب دینے کے کل طریقے ۲ⁿ ہیں اگر دو منفی علامات

دریافت کرو۔
۳۷۔ چھ مختلف رنگ کے جھنڈوں کو ایک دوسرے پر اکھٹا
کھڑا کرنے سے کل کتنے مختلف نشان بن سکتے ہیں اگر ان میں سے کوئی
سی تعداد ایک وقت اکھٹی کھڑی کی جا سکے۔

۳۹۔ اگر لفظ ”دستاویز“ کے حروف میں سے چار چار حروف

الفاظ میں حرفت سے واقع ہو گا۔
۱۴۴۔ اب تک جتنے مسائل ہم نے ثابت کیے ان میں اشیاء
مختلف تھیں۔ اس سے پیشتر کہ ہم ان صورتوں پر غور کریں جن میں اشیاء
کے ایک یا ایک سے زیادہ جُٹ متماثل یا متشابه ہوں، یہ بیان کر دینا
ضروری ہو گا کہ کن معانی میں ہم الفاظ مختلف اور متشابه کو
استعمال کرتے ہیں۔ اشیاء کے مختلف اور غیر متشابه ہونے
سے ہماری یہ مراد ہے کہ دیکھنے میں وہ مختلف ہیں اور ایک
دوسری سے یقینی تمیز ہو سکتی ہیں۔ برعکس اس کے ہم
لفظ متماثل یا متشابه سے ایسی اشیاء تعبیر کرتے ہیں جو دیکھنے میں

یکساں اور ہر طرح سے مشابہ ہیں اور ایک دوسری سے تمیز نہیں ہو سکتیں۔

۱۴۵ — فرض کرو کہ ہمیں ایسی بارہ کتابوں کو کسی طاق پر ترتیب دینا ہے جن میں سے ۵ لاطینی ہیں ۴ انگریزی اور باقی مختلف زبانوں میں۔

ہر ایک زبان کی کتابوں میں ایک مشترک خاصیت سے جس کی وجہ سے وہ سب کی سب ایک ہی جنس میں شمار ہو سکتی ہیں لیکن اگر وہ ایک دوسری سے شناخت ہو سکیں تو ترتیبوں کی تعداد ۱۲ ہوگی کیونکہ بلحاظ ترتیب کے وہ ایک دوسری سے مختلف ہیں۔

اگر ایک زبان کی کتابیں ایک دوسری سے تمیز نہ ہو سکیں تو اس صورت میں ہمیں ۱۲ اشیاء کی ترتیبیں دریافت کرنی چاہئیں جب کہ ان میں سے ۵ ایک قسم کی ہیں اور ۴ دوسری قسم کی۔ یہ مسئلہ ان صورتوں میں ٹھیک طور پر شامل نہیں ہے جن کی ہم اوپر تحقیق کر چکے ہیں۔

۱۴۶ — ن اشیاء ہیں سے ف اشیاء بالکل متشابہ اور ایک قسم کی ہیں، ق اشیاء بالکل متشابہ اور دوسری قسم کی، ر اشیاء بالکل متشابہ اور تیسری قسم کی اور باقی سب اشیاء مختلف۔ ان سب اشیاء کو ایک ساتھ آپس میں ترتیب دینے کے طریقوں کی تعداد دریافت کرو۔
ن اشیاء کو ہم ن حروف سے تعبیر کر سکتے۔ فرض کرو کہ حرف ل کی تعداد ف ہے، حرف ب کی تعداد ق، اور حرف ج کی تعداد ر اور باقی سب حروف مختلف ہیں۔

فرض کرو کہ مطلوبہ ترتیبوں کی تعداد لا ہے۔
اب اگر ان لا ترتیبوں میں سے کسی ایک ترتیب میں ف متشابہ حرف ل کی جگہ ایسے ف حروف رکھ دیں جو آپس میں

اور باقی ماندہ تمام حروف سے مختلف ہیں تو صرف ان نئے ف حروف کی ترتیب کو بدلنے سے ابتدائی ایک ترتیب کی بجائے ل ف ترتیب حاصل ہونگی۔ پس اگر لا ترتیبوں میں سے ہر ایک ترتیب میں اس قسم کی تبدیلی کی جائے تو لا ل ف ترتیبیں حاصل ہونگی۔ اسی طرح اگر ان نئی ترتیبوں میں سے کسی ایک ترتیب میں ق متشابہ حروف ب کی جگہ ایسے ق حرف رکھ دیں جو آپس میں اور باقی ماندہ تمام حروف سے مختلف ہیں تو ان سے ق حروف کی ترتیبوں کو آپس میں بدلنے سے ل ق نئی ترتیبیں حاصل ہونگی۔ پس اس صورت میں نئی ترتیبوں کی مجموعی تعداد لا ل ف ل ق ہوگی۔

اسی طرح سے عمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں اگر تمام کے تمام حروف آپس میں مختلف ہوں تو ترتیبوں کی مجموعی تعداد لا ل ف ل ق ل ر ہوگی لیکن ن مختلف حروف کو آپس میں ترتیب دینے کے طریقوں کی تعداد ل ن ہے۔
پس لا ل ف ل ق ل ر = ل ن

اس لیے لا = $\frac{\text{ل ن}}{\text{ل ف ل ق ل ر}}$ اور یہ ترتیبوں کی مطلوبہ تعداد ہے۔
ایسی ہر ایک صورت جس میں سب اشیاء مختلف نہ ہوں اسی طرح سے حل ہو سکتی ہے۔
مثال ۱۔ کتنی مختلف ترتیبیں لفظ "ترترات" سے بن سکتی ہیں۔
جبکہ کل حروف ہر ایک ترتیب میں شامل ہوں۔
یہاں کل سات حرف ہیں جن میں سے چار ت ہیں دو ر اور ایک ا ہے۔ اس لیے ترتیبوں کی تعداد

$$۱۰۵ = \frac{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}{۲} = \frac{۱۲۰}{۲} =$$

مثال ۲۔ لفظ "قسططنطنیہ" کے حروف سے کل کتنے مختلف الفاظ بن سکتے ہیں اور ان میں سے کتنے الفاظ میں دونوں ن متصل ہونگے؟
کل حرف ۸ ہیں جن میں سے دو ط ہیں، دو ن اور باقی مختلف

$$\frac{8!}{2!2!} = \text{اس لیے الفاظ کی تعداد مطلوبہ}$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 =$$

$$10080 = 5040 \times 2 =$$

اگر دونوں ن ہمیشہ اکٹھے رہیں تو ہم انہیں ایک حرف خیال کر سکتے ہیں اور ایسا کرنے سے ہمارے پاس صرف ۷ حرف رہیں گے جن میں سے دو ط ہیں اور ان کو آپس میں ترتیب دینے کے

$$\frac{7!}{2!} = \text{مختلف طریقے}$$

$$2520 =$$

مثال ۳۔ حاصل ضرب ۱۰۸۰۰ کے حروف کتنے مختلف طرح سے اکٹھے ترتیب دیے جاسکتے ہیں۔

کل حرف ۱۱ ہیں جن میں سے پانچ ۱ ہیں اور چار ۸

$$\frac{11!}{5!4!} = \text{اس لیے انہیں ترتیب دینے کے کل مختلف طریقے}$$

$$4 \times 2 \times 9 \times 10 \times 11 =$$

$$13860 =$$

مثال ۴۔ اگر طاق ہند سے ہمیشہ طاق مقامات پر لکھے جائیں تو

معلوم کرو کہ مفصلہ ذیل سات ہندسوں سے کل کتنے مختلف اعداد بن سکتے ہیں۔

$$1, 2, 3, 4, 3, 2, 1$$

طاق ہند سے ۱، ۳، ۳، ۱ ہیں ان کو چار طاق مقامات میں ترتیب

دینے کے طریقے = $\frac{۴}{۲۱۲}$ (۱)

جفت ہندسوں ۲، ۲، ۲ کو تین جفت مقامات میں ترتیب دینے

کے طریقے = $\frac{۳}{۱۱}$ (۲)

(۱) کا ہر ایک طریقہ (۲) کے ہر ایک طریقے سے منسلک ہو سکتا ہے

اس لیے اعداد مطلوبہ کی تعداد = $\frac{۴}{۲۱۲} \times \frac{۳}{۱۱} = ۳ \times ۶ = ۱۸$

مثال ۵۔ دس لاکھ سے بڑے کتنے اعداد سات ہندسوں

۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ سے بن سکتے ہیں۔

چونکہ ہر ایک عدد میں کم از کم سات ہندسے ہونے چاہئیں۔
اس لیے ہمیں اوپر کے سب ہندسے اکٹھے استعمال کرنے پڑینگے۔

اب ان سات ہندسوں میں دو ۲ ہیں اور تین ۳ اس لیے
ان سات ہندسوں کو آپس میں ترتیب دینے کے مختلف طریقوں کی

تعداد = $\frac{۷}{۳۱۲} = ۲۲۰$ لیکن ان میں وہ ترتیبیں بھی شامل ہیں

جن میں بائیں طرف سب سے پہلا ہندسہ صفر ہے چونکہ ان ترتیبوں سے
اعداد مطلوبہ حاصل نہیں ہوتے اس لیے انہیں خارج کرنا چاہیے۔

صریحاً صفر سے اس طرح شروع ہونے والی ترتیبوں کی تعداد
وہی ہے جو باقی ۷ ہندسوں کو آپس میں ترتیب دینے کے طریقوں کی تعداد

اس لیے ان کی تعداد = $\frac{۷}{۲۱۳} = ۶۰$

پس تعداد مطلوبہ = $۲۲۰ - ۶۰ = ۱۶۰$

۱۴۷۔ ن اشیا میں سے ر اشیا کی ترتیبیں اس صورت میں دریافت کرو جبکہ ہر ایک شے کسی ایک ترتیب میں ایک مرتبہ، دو مرتبہ، تین مرتبہ، ... ر مرتبہ تکرار پاسکے۔

اس جگہ ن مختلف اشیا سے ر مقامات پر کرنے مطلوب ہیں جبکہ کسی ایک ترتیب میں ن اشیا میں سے کسی ایک شے کو ہم جتنی دفعہ چاہیں استعمال کر سکتے ہیں۔

پہلا مقام ن طرح سے پر ہو سکتا ہے اور جب یہ کسی ایک طرح سے پر ہو جائے تو دوسرا بھی ن طرح سے پر ہو سکتا ہے کیونکہ شرائط سوال سے ایک ہی شے کو دوبارہ استعمال کرنے کی اجازت ہے۔ اس لیے پہلے دو مقامات پر کرنے کے طریقے $n \times n$ یا n^2 ہیں تیسرا مقام ن طرح سے پر ہو سکتا ہے اور اس لیے پہلے تین مقامات ن طریقوں سے پر ہو سکتے ہیں۔

اسی طرح عمل کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ہر ایک منزل پر ن کا قوت نما پر کردہ مقامات کی تعداد کے برابر ہے اس لیے ر مقامات پر کرنے کے کل طریقے n^3 ہیں۔

مثال۔ کسی اسکول کے سالانہ جلسہ پر ہ انعام ۴ لڑکوں کو دیے جائینگے۔ اگر ہر ایک لڑکا ایک یا ایک سے زیادہ انعاموں کا مستحق ہو سکے تو معلوم کرو کہ کتنی طرح سے انعام تقسیم ہو سکتے ہیں۔

پانچ انعاموں میں سے کوئی سا انعام ۴ طریقوں سے دیا جاسکتا ہے اور پھر باقی ماندہ انعاموں میں سے کوئی سا ۴ طریقوں سے دیا جاسکتا ہے کیونکہ یہ اسی لڑکے کو دیا جاسکتا ہے جو پہلے انعام لے چکا ہے۔ اس طرح سے دو انعام ۴ طریقوں سے اور تین انعام ۴ طریقوں سے تقسیم ہو سکتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس لیے پانچوں انعام ۴ یعنی $4^5 = 1024$ طرح سے تقسیم ہو سکتے ہیں۔

ایسا عمل کرنے کے کل طریقے

..... $2 \times 2 \times 2 =$ ن اجزائے ضربی تک

مگر اس میں وہ صورت بھی شامل ہے جس میں تمام اشیاء چھوڑ دی گئی ہیں اور کوئی منتخب نہیں کی گئی اس لیے اگر اس کو خارج کر دیا جائے تو مطلوبہ طریقوں کی تعداد ۲- ۱ ہوگی۔

طریقوں کی تعداد ۲-۱-۱ ہولی -
 اس کو بعض اوقات یوں بیان کرتے ہیں کہ ن اشیاء کے "کل
 ممکن اجتماعوں کی تعداد" ۲-۱-۱ ہے -
 مثال - ایک شخص کے ۶ دوست ہیں وہ اُن میں سے ایک
 یا زیادہ کو کتنی طرح سے مہمان بلا سکتا ہے ؟
 اُسے اپنے چھ احباب میں سے چند یا سب کے سب منتخب
 کرنے ہیں -

اس لیے کل طریقے $1 - 2 = 43$
 اس کی تصدیق اس طرح ہو سکتی ہے -
 مہمانوں میں سے ایک ایک 'دو دو' یکمین تین' بلائے
 جاسکتے ہیں۔ اس لیے انتخابوں کی کل تعداد = $1 + 4 + 15 + 20 + 15 + 4 = 43$

۱۴۹۔ ر کی کس قیمت کے لیے ن اشیاء میں سے ر اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد بڑی سے بڑی ہوگی؟

سلسلہ چ، چ، چ، چ..... پر غور کرو۔

ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ اس سلسلے کی کون سی رقم سب سے بڑی ہے یا دوسرے الفاظ میں ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ ۱، ۲، ۳، ...، n میں سے کون سی قیمت r کو دی جاوے کہ r کی قیمت بڑی سے بڑی ہو۔

$$\text{چونکہ } r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times r}$$

$$\text{اور } r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times r}$$

$$\text{اس لیے } r = \frac{n}{1+r-n} \times r$$

ضارب جزو ضربی $\frac{n}{1+r-n}$ صورت $\frac{1+n}{r}$ - ۱ میں لکھا

جاسکتا ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ جیسے r کی قیمت بڑھتی ہے ویسے اس جزو ضربی کی قیمت گھٹتی ہے پس اگر r کو قیمتیں ۱، ۲، ۳، ...، n بالترتیب دی جائیں تو r کی قیمت متواتر بڑھتی جائیگی جب تک کہ جزو ضربی $\frac{1+n}{r}$ - ۱ ایک کے برابر یا ایک سے کم نہ ہو جائے۔

$$\text{اب } \frac{1+n}{r} - 1 < 1$$

$$\text{جب تک کہ } \frac{1+n}{r} < 2$$

$$\text{یعنی } \frac{1+n}{r} < 3 \dots \dots \dots (1)$$

اب ہمیں r کی وہ بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرنی ہے جو رشتہ (۱) کو پورا کرے۔

صورت اول - اگر n جفت ہو اور m کے برابر ہو تو

$$\frac{1}{2} + m = \frac{1+m^2}{2} = \frac{1+n}{2}$$

اب اگر ر کو سب قیمتیں ۱، ۲، ۳، م تک (مع قیمت م کے) یکے بعد دیگرے دی جائیں تو ان قیمتوں کے لیے $\frac{1+n}{2}$ یعنی $m + \frac{1}{2}$ ہر ایک صورت میں ر سے بڑا ہے یعنی ر کی ایسی تمام قیمتوں کے لیے رشتہ (۱) پورا ہوتا ہے اس لیے ر کو م یعنی $\frac{n}{2}$ کے مساوی رکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ اس صورت میں اجتماعوں کی بڑی سے بڑی تعداد $\frac{n}{2}$ ہے۔ صورت دوم۔ فرض کرو کہ n طاق ہے اور $m + 1$ کے برابر ہے تو

$$\frac{1}{2} + m = \frac{2+m^2}{2} = \frac{1+n}{2}$$

اب اگر ر کو تمام قیمتیں ۱، ۲، ۳، م تک (مع قیمت م کے) یکے بعد دیگرے دی جائیں تو ان سب قیمتوں کے لیے $\frac{1+n}{2}$ یعنی $m + 1$ بڑا ہے ر سے لیکن جب $r = m + 1$

$$\text{تو جزو ضربی } \frac{n}{r} = \frac{1+m^2-1-m-1+1}{1+m} = 1 \text{ اور}$$

$$n + m + 1 = n + m \text{ یعنی } \frac{n}{2} + 1 = \frac{n}{2} - 1$$

اور اس لیے اجتماعوں کی تعداد اس وقت بڑی سے بڑی ہوگی جب کہ $\frac{n}{2} + 1$ یا $\frac{n}{2} - 1$ اشیا کے اجتماع بنائے جائیں اور نتیجہ دونوں صورتوں میں ایک ہی ہوگا۔

مثال۔ ایک شخص کے دس دوست ہیں وہ نہیں اس طرح مہمان بلانا چاہتا ہے کہ ہر ایک دعوت میں مہمانوں کی تعداد ایک ہی ہو اور کسی دو دعوتوں میں ہی مہمان

نہ آئیں اگر وہ زیادہ سے زیادہ ایسی دعوتیں دینا چاہے تو معلوم کرو کہ ہر مرتبہ کتنے مہمان بلائے۔ مہمانوں کی مختلف جماعتوں کی تعداد = ہجڑ جہاں ر مہمانوں کی تعداد ہے

$$\text{ہجڑ} = \frac{(10 \times 9 \times 8 \times \dots \times (r-12)(r-11)(r-10))}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (1-r)}$$

$$\text{ہجڑ} = \frac{(10 \times 9 \times 8 \times \dots \times (r-12)(r-11)(r-10))}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (1-r)}$$

$$\frac{\text{ہجڑ}}{\text{ہجڑ}} = \frac{r-11}{r}$$

اب ہجڑ < ہجڑ

اگر $r-11 < r$

یعنی $11 < r$

یعنی $\frac{11}{r} < 1$

پس غیر مساوات (۱) کے موافق r کی بڑی سے بڑی قیمت ۵ ہے معلوم ہوا کہ اُسے ہر مرتبہ ۵ مہمان بلائے چاہئیں۔

۱۵۰۔ قاعدہ ترتیب اشیا، دفعہ ۱۳ کی استعانت کے بغیر ن اشیا میں سے r اشیا کے اجتماعوں کی تعداد دریافت ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ ن اشیا میں سے r اشیا کے کل اجتماع ہجڑ سے تعبیر ہوتے ہیں اور ن حروف 'ا' 'ب' 'ج' 'د' وغیرہ دی ہوئی ن اشیا کو تعبیر کرتے ہیں۔

حروف 'ا' 'ب' 'ج' 'د' وغیرہ میں سے r کو علیحدہ کرو اور باقی ن۔ ا حروف میں سے $r-1$ اشیا کے $r-1$ اجتماع بناؤ اب ان سب اجتماعوں کے ساتھ r کو لکھ دو تو معلوم ہوگا کہ ن اشیا میں سے r اشیا کے ایسے اجتماع جن میں r شامل ہے $r-1$ ہیں اسی طرح سے ان اجتماعوں کی تعداد جن میں r شامل

ہے۔ n ۔ج۔ r ۔۱ ہے اور اسی طرح n حروف میں سے ہر ایک حرف کے لیے۔

اس لیے $n \times n$ ۔ج۔ r ۔۱ = r ۔۱ اشیا کے اجتماع جن میں r شامل

ہے + r ۔۱ اشیا کے اجتماع جن میں r شامل ہے + r ۔۱ اشیا کے اجتماع جن میں r شامل ہے + وغیرہ۔

لیکن اس طرح اجتماع بنانے میں ہر ایک اجتماع r دفعہ مکرر آئیگا مثلاً اجتماع r ۔۱ ج۔ r ۔۱ (جس میں r حروف ہیں)

ایک ایک دفعہ ان سب اجتماعوں میں واقع ہوگا جن میں r شامل ہے، جن میں r شامل ہے جن میں r شامل ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔

پس معلوم ہوا کہ

$$n$$
۔ج۔ r ۔۱ = n ۔ج۔ r ۔۱ $\times \frac{n}{r}$

n اور r کی جگہ بالترتیب n ۔۱ اور r ۔۱ لکھنے سے

$$n$$
۔ج۔ r ۔۱ = n ۔ج۔ r ۔۲ $\times \frac{n-1}{r-1}$

$$\text{اسی طرح سے } n$$
۔ج۔ r ۔۲ = n ۔ج۔ r ۔۳ $\times \frac{n-2}{r-2}$

$$n$$
۔ج۔ r ۔۳ = n ۔ج۔ r ۔۴ $\times \frac{n-3}{r-3}$

$$n$$
۔ج۔ r ۔۴ = n ۔ج۔ r ۔۵ $\times \frac{n-4}{r-4}$

ستونوں کو آپس میں اکٹھا ضرب دیں اور متماثل ارقام کو طر فیج خارج کریں تو حاصل ہوگا۔

$$n$$
۔ج۔ r ۔۱ = $\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{r(r-1)(r-2) \dots (r-1)}$

۱۵۱۔ ثابت کرو کہ $nج + ۱ج = n+۱ج$

$n+۱$ اشیا میں سے n اشیا کے اجتماعوں کو دو جماعتوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے بموجب اس کے کہ ان میں ایک خاص شے شامل ہے یا نہیں۔ ان اجتماعوں کی تعداد جن میں ایک خاص شے شامل ہے $nج$ سے تعبیر ہوگی اور ان اجتماعوں کی تعداد جن میں وہ خاص شے شامل نہیں ہے $۱ج$ سے تعبیر ہوگی۔ پس حاصل ہوتا ہے کہ

$$nج + ۱ج = n+۱ج$$

مشق :- مندرجہ بالا نتیجہ کو $nج$ کی قیمت کے ضابطہ کی مدد سے حاصل کرو۔

۱۵۲۔ اگر $ف + ق + ر + \dots$ اشیا میں سے ف اشیا

متشابه اور ایک قسم کی ہوں، ق اشیا متشابه اشیا اور دوسری قسم کی ر اشیا متشابه اور تیسری قسم کی اور علیٰ نذا القیاس تو ان میں سے چند یا سب کی سب اشیا منتخب کرنے کے کل ممکن طریقے دریافت کرو۔

ایسے انتخابوں میں ف اشیا ف + ا طرح سے استعمال میں آسکتی ہیں کیونکہ ہم ان میں سے '۱'، '۲'، '۳'، ... ف اشیا منتخب کر سکتے ہیں اسی طرح سے ق اشیا ق + ا طرح سے استعمال میں آسکتی ہیں، ر اشیا ر + ا طرح سے اور علیٰ نذا القیاس۔

اس لیے سب اشیا کو استعمال میں لانے کے کل طریقے $(ف+۱)(ق+۱)(ر+۱)\dots$ ہیں لیکن ان میں وہ طریقہ بھی شامل ہے جب کوئی شے بھی منتخب نہ کی گئی ہو اس صورت کو خارج کرنے سے کل مطلوبہ طریقوں کی تعداد

$$= (ف+۱)(ق+۱)(ر+۱)\dots - ۱$$

۱۵۳۔ جب کل اشیاء مختلف نہ ہوں تو ان اشیاء میں سے 'ر' اشیاء کے اجتماعوں یا ترتیبوں کی تعداد معلوم کرنے کا عام قاعدہ ذرا پیچیدہ ہوگا لیکن اس کی خاص صورتیں اس طرح حل ہو سکتی ہیں۔

مثال۔ لفظ "مستنیات" کے حروف سے چار چار حروف کے

(۱) اجتماع (۲) ترتیبیں کتنی مختلف طرح سے بن سکتی ہیں۔

یہاں ۵ مختلف اقسام کے ۸ حروف ہیں 'م' 'م' 'ت' 'ت' 'ن' 'ن' 'ی' 'ا' چار چار حروف کے مجموعے مفصلہ ذیل حروف کو اکٹھا کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

(۱) دو متشابہ حروف 'و' اور 'ت' متشابہ حروف

(۲) دو متشابہ 'و' دو مختلف 'و'

(۳) چاروں مختلف 'و'

(۱) یہ انتخاب پہلے طرح سے ہو سکتا ہے کیونکہ ۳ جوڑوں

'م' 'م' 'ت' 'ت' 'ن' 'ن' میں سے ہمیں صرف ۲ منتخب کرنے میں پس اس قسم کے اجتماع پہلے = ۳

(۲) یہ انتخاب پہلے \times پہلے طرح سے ہو سکتا ہے کیونکہ متشابہ حروف کا صرف ایک جوڑا لینا ہے اور باقی ۴ قسم کے حروف میں سے دو مختلف حروف منتخب کرنے میں پس اس صورت میں اجتماعوں کی تعداد ۱۸ ہے۔

(۳) یہ انتخاب پہلے طرح سے ہو سکتا ہے کیونکہ ۵ حروف

'م' 'ت' 'ن' 'ی' 'ا' میں سے ہمیں صرف ۴ حروف منتخب کرنے میں ان اجتماعوں کی تعداد ۵ ہے۔

پس کل مطلوبہ اجتماعوں کی تعداد = $۳ + ۱۸ + ۵ = ۲۶$

چار چار حروف کی مختلف ترتیبوں کی تعداد معلوم کرنے کے لیے ہمیں مستدرجہ بالا اجتماعوں میں سے ہر ایک کو آپس میں تمام ممکن

طریقوں سے ترتیب دینا چاہیے۔

(۱) سے ۳ $\times \frac{۲}{۲! \times ۲!}$ یا ۱۸ ترتیبیں حاصل ہوتی ہیں

(۲) سے $\frac{۲}{۲!} \times ۱۸$ یا ۲۱۶ " " " " " "

(۳) سے $۵ \times \frac{۲}{۲!}$ یا ۱۲۰

مطلوبہ ترتیبوں کی تعداد = $۱۲۰ + ۲۱۶ + ۱۸ = ۳۵۴$

مدور ترتیبیں

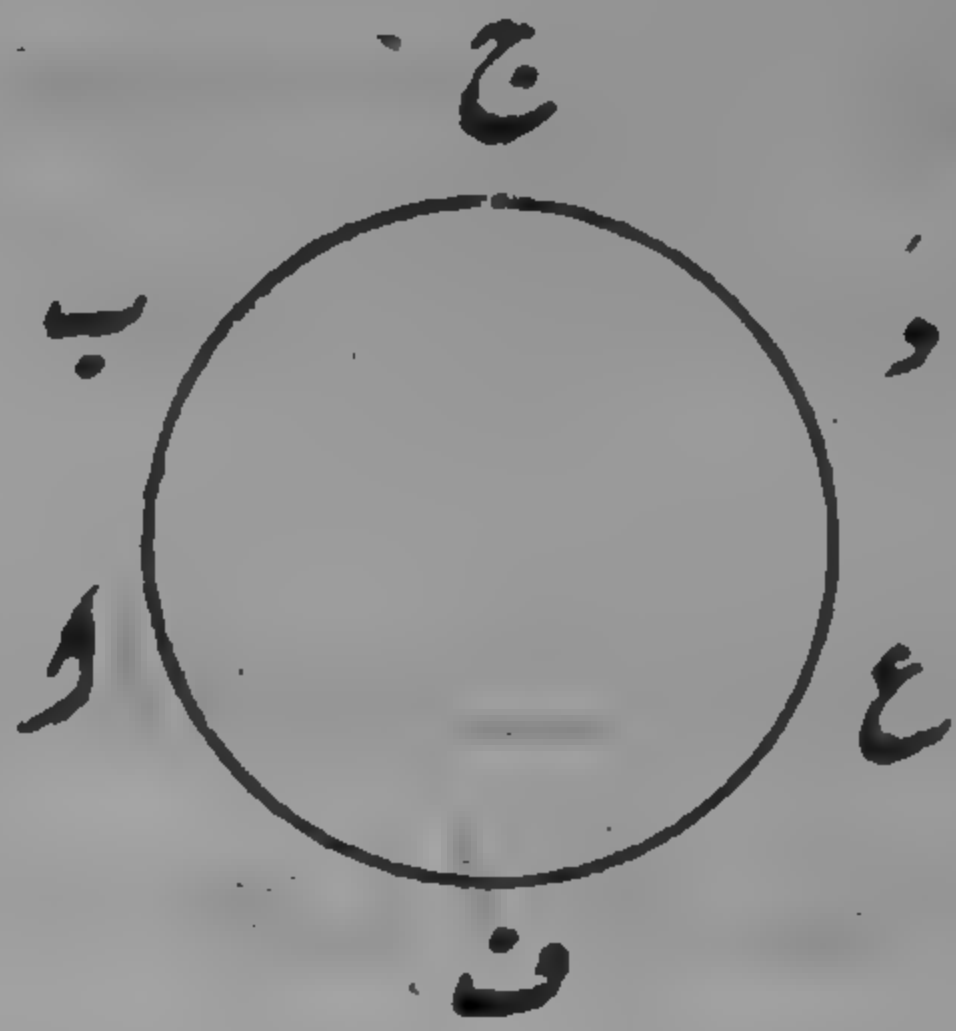
۱۵۴۔ اشیاء کی ترتیبیں لگاتے وقت اُن کو بالعموم ایک خط مستقیم پر ترتیب دیا ہوا فرض کرتے ہیں اسی صورت میں ترتیب کا آغاز بھی ہوتا ہے اور انجام بھی۔ اس قسم کی ترتیبوں کو خطی یا عرضی ترتیبیں کہتے ہیں (اب تک ہم نے صرف ایسی ترتیبوں پر غور کیا ہے) لیکن اگر ہم اشیاء کو دائرے کے محیط پر بالقریبہ ترتیب دیں تو ترتیب کا نہ آغاز ہے نہ انجام ایسی ترتیب کو ترتیب مدور یا گول ترتیب کہتے ہیں۔

اگر کسی خط مستقیم پر ۶ حرف 'ا' 'ب' 'ج' 'د' 'ع' 'ف' کو حسب ذیل ۶ طرح سے ترتیب دیں تو یہ سب ترتیبیں مختلف کہلائیگی۔

ا	ب	ج	د	ع	ف
ف	ا	ب	ج	د	ع
ع	ف	ا	ب	ج	د
د	ع	ف	ا	ب	ج
ج	د	ع	ف	ا	ب
ب	ج	د	ع	ف	ا

لیکن ان ۶ مختلف خطی ترتیبوں کے جواب میں صرف ایک

مدور ترتیب حاصل ہوتی ہے جیسا کہ ذیل کی شکل سے ظاہر ہے



پس معلوم ہوا کہ ۶ اشیا کو ایک دائرہ کے محیط پر ترتیب دینے

کے طریقوں کی تعداد = $\frac{6!}{6} = \frac{720}{6} = 120$

اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ ن مختلف اشیا کو ایک دائرہ کے گرد ترتیب کے طریقوں کی تعداد = $n!$ ۔

۱۵۵۔ موتیوں کے ہار

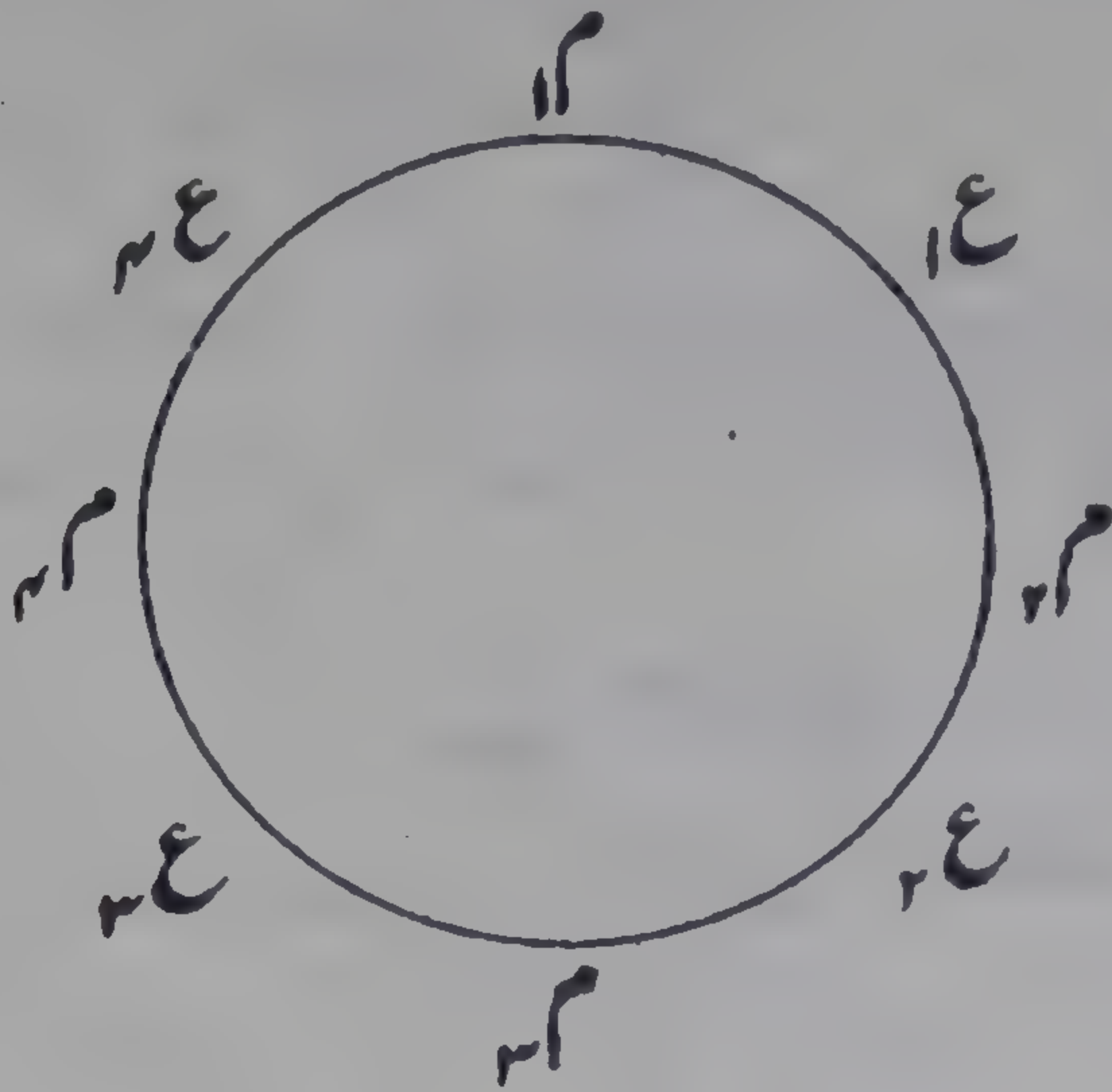
اگر ن مختلف موتیوں کو ایک ہار میں پرونا منظور ہو تو وہ نہیں مختلف طرح سے آپس میں ترتیب دینے کے طریقے $n!$ ۔ ا ہونگے۔
کیونکہ فرض کرو کہ کسی ہار میں اچھ موتی ہیں اور ان کی ترتیب گھڑی کی سوئیوں کی موافق سمت میں ا ب ج د ع ف ہے
(دیکھو شکل دفعہ سابق)۔

اب اگر ہار کو الٹ دیا جائے اور پہلی ترتیب کو اسی سمت میں یعنی موافق سمت ساعت پڑھا جائے تو وہ ف ع د ج ب ا ہوگی پس معلوم ہوا کہ دو ترتیبیں جو دائرہ کے محیط پر ترتیب دی ہوئی اشیا کی صورت میں مختلف تھیں ہار کی حالت میں ایک ہی ہیں۔
اس لیے ہار کے ن موتیوں کی مختلف ترتیبوں کی تعداد

= ن اشیا کو ایک دائرہ کے محیط پر ترتیب دینے کے طریقوں کی تعداد کا
نصف = $\frac{1}{2} \times n$ - ۱

مثال ۱ - ۴ مرد اور ۴ بچوں کو ایک گول میز کے گرد اس طرح
بٹھانے کی کل مختلف ترتیبیں دریافت کرو کہ ہر ایک بچہ دو مردوں کے
درمیان ہو۔

چار مردوں کو ایک گول میز کے گرد بٹھانے کے طریقوں کی
تعداد = ۳! فرض کرو کہ مردوں کو بٹھانے کا ایک طریقہ شکل ذیل
میں مندرج ہے جہاں م، م، م، م چار مردوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

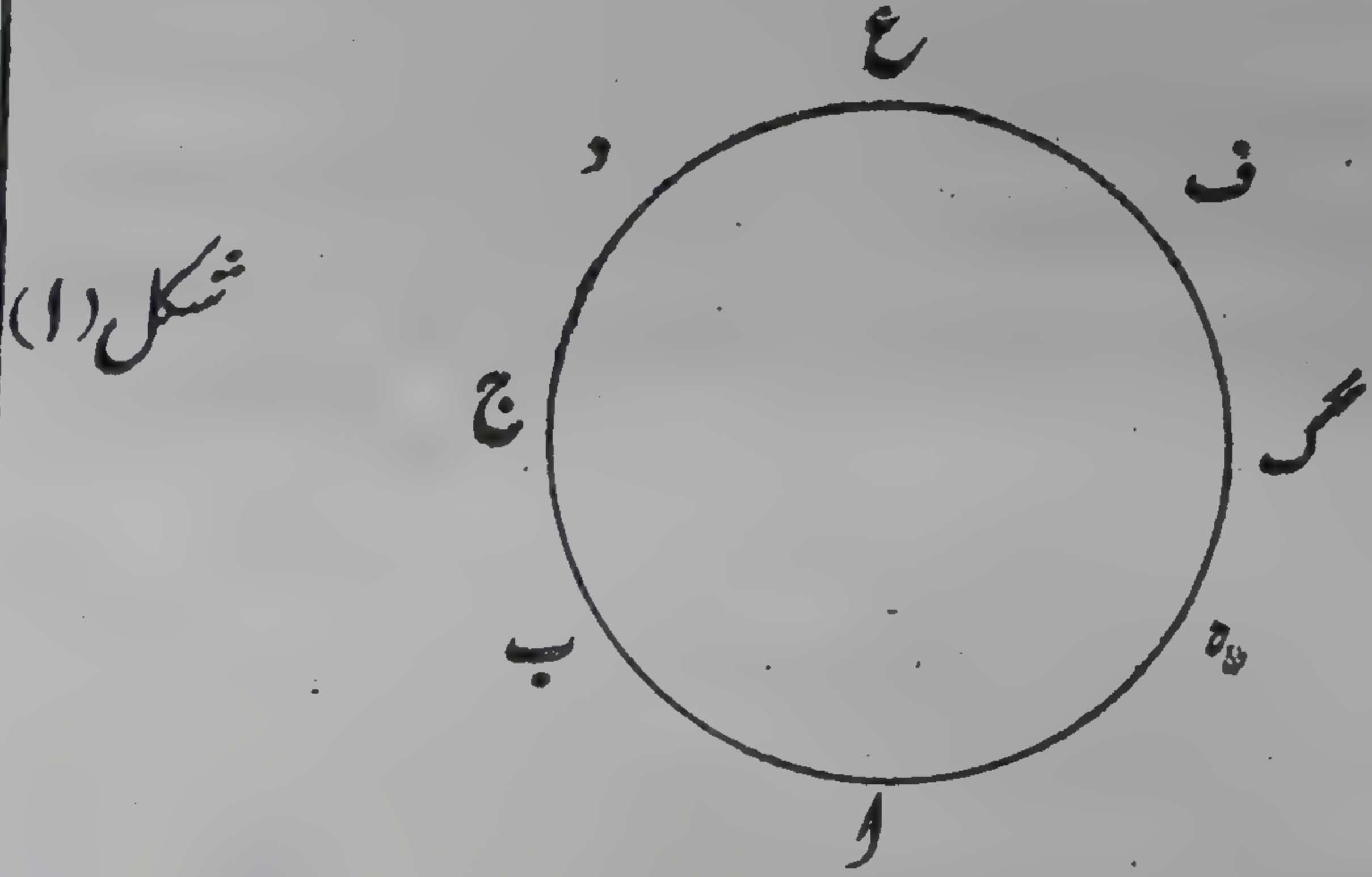


تب صریحاً چار مردوں کے درمیان ۴ مقام (ع، ع، ع، ع) ہیں
جو بموجب شرط سوال چار بچوں کے لیے مخصوص ہیں پس معلوم ہوا کہ
مردوں کو بٹھانے کے ایک طریقے کے مقابل بچوں کو بٹھانے کے
طریقے لگے ہیں۔

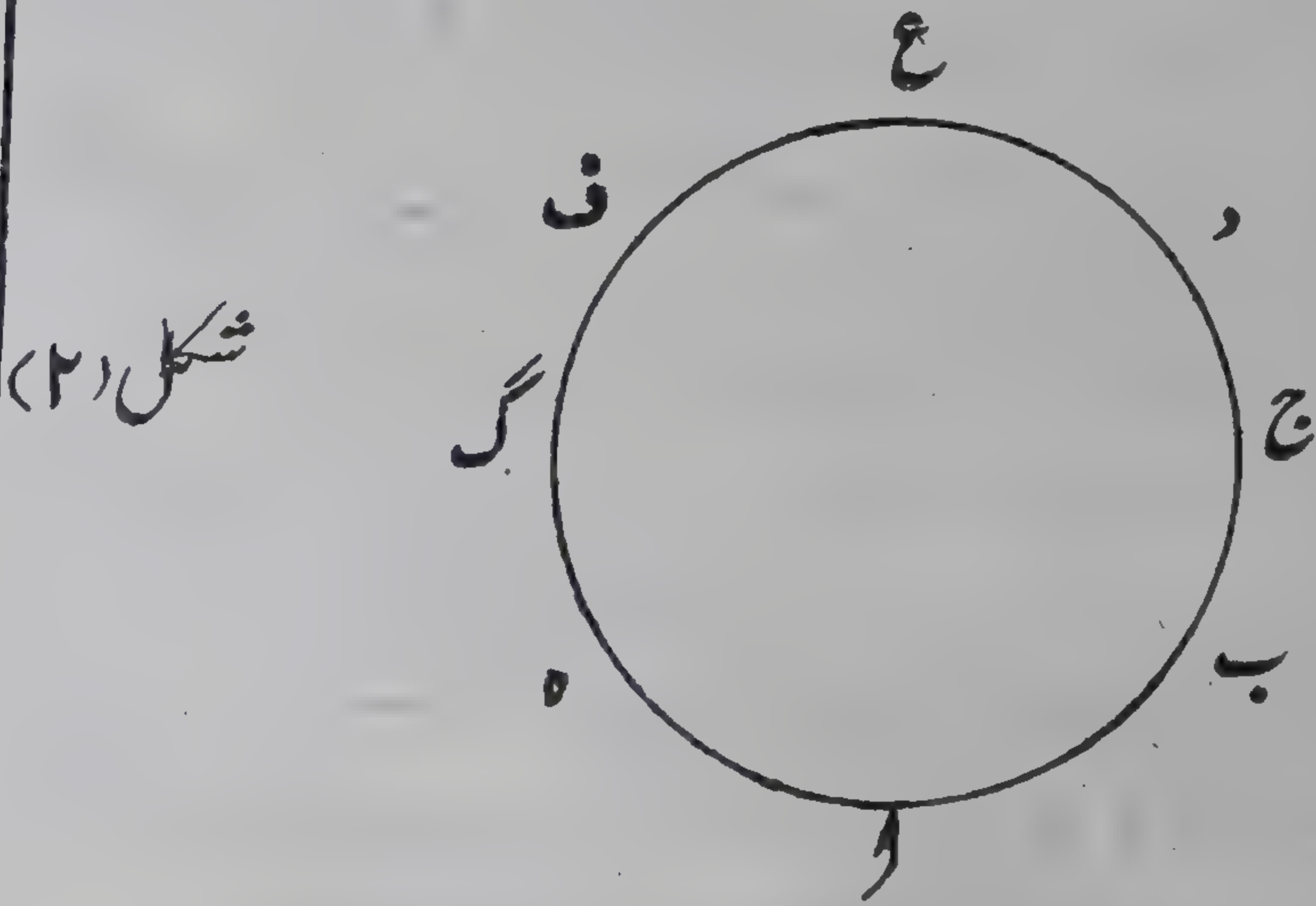
پس مطلوبہ طریقوں کی کل تعداد = $3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$
مثال ۲ - کتنی طرح سے ۸ آدمی ایک گول میز کے گرد اس طرح
بیٹھ سکتے ہیں کہ کسی دو ترتیبوں میں ان میں سے ہر ایک کے

وائیں بائیں و ہی پہلو نشین نہ ہوں۔
۸ آدمیوں کو گول میز کے گرد ترتیب دینے کے طریقوں کی

تعداد = $\frac{1}{2} \times 8 \times 7 = 28$
فرض کرو کہ ایک ترتیب یہ ہے شکل (۱)



اگر ا کو اپنی جگہ سے نہ ہلایا جائے تو صرف ۲۸ ترتیبوں میں ایک
اور یہ ہوگی شکل (۲)



ظاہر ہے کہ اوپر کی دونوں ترتیبوں میں ۸ آدمیوں میں سے ہر ایک کے وہی پہلو نشین ہیں (مثلاً و کے دائیں بائیں پہلی اور دوسری ترتیب میں ج اور ع ہیں اگرچہ پہلی ترتیب کا دایاں ساتھی دوسری ترتیب میں بائیں طرف چلا گیا ہے) اور ہم دیکھتے ہیں کہ حروف ب، ج، و، ع، ف، گ، ہ کو خواہ کسی طرح سے موافق سمت ساعت ترتیب دیا جائے، بعینہ اسی اسلوب سے ان کو مخالف سمت ساعت ترتیب دیا جاسکتا ہے اور ظاہر ہے کہ اس قسم کی صرف دو ترتیبیں ایسی ہیں جن میں سب کے سب ۸ شخصوں کے وہی پہلو نشین ہیں۔

پس بموجب شرائط سوال ایسی دو ترتیبوں کو صرف ایک ترتیب شمار کرنا چاہیے اور اس لیے مطلوبہ ترتیبوں کی تعداد

$$2520 = 5040 \times \frac{1}{2} =$$

مثال ۳۔ ایک شخص م + ن دوستوں کو مہمان بلاتا ہے اور م کو ایک گول میز کے گرد بٹھاتا ہے اور ن کو دوسری گول میز کے گرد۔ معلوم کرو کہ آپس میں مہمان کتنی طرح سے ترتیب دیے جاسکتے ہیں۔

م دوستوں کی ایک جماعت منتخب کرتے وقت ہر دفعہ ن دوستوں کی ایک جماعت باقی رہتی ہے پس م اور ن دوستوں کی

$$\text{مختلف جماعتیں بنانے کے مختلف طریقے} = \text{م} + \text{ن} = \frac{\text{م} + \text{ن}}{\text{م} \times \text{ن}}$$

اب جماعتیں بنانے کے بعد وہ م دوستوں کو ایک میز کے گرد لے آ کر ا طرح سے ترتیب دے سکتا ہے اور ن دوستوں کو دوسری میز کے گرد لے آ کر ا طرح سے۔

اس لیے جماعتیں بنانے کے ہر ایک طریقے کے مقابل مہمانوں کو آپس میں ترتیب دینے کے لے آ کر ا × لے آ کر ا طریقے ہیں۔

پس مہمانوں کو ترتیب دینے کے کل طریقے

$$\frac{m+n}{m} = \{1 - \frac{n}{m}\} \times \frac{m+n}{m}$$

امثلہ نمبری ۱۱ ب

- ۱۔ ثابت کرو کہ $n - n + n - n = ۱$ ۔
- ۲۔ ثابت کرو کہ $n + n + n + n + n + n + n + n = ۲ - ۱$ ۔
- ۳۔ آٹھ اشیا میں سے ایک یا ایک سے زیادہ اشیا منتخب کرنے کے مختلف طریقے دریافت کرو۔
- ۴۔ اگر $n : ۱ = ۵$ تو n کی قیمت دریافت کرو۔
- ۵۔ مفصلہ ذیل الفاظ کے حروف سے جو مختلف ترتیبیں بن سکتی ہیں ان کی تعداد دریافت کرو۔ (۱) دارالسرجمہ (۲) محدود زمان (۳) الاستعداد
- ۶۔ ۱۴ جھنڈیوں سے ایک کمرہ سجانا ہے اگر ان میں ۲ نیلی، ۳ سرخ، ۲ سفید، ۳ سبز، ۲ زرد اور ۲ ارغوانی ہوں تو معلوم کرو کہ وہ کتنی طرح سے اکٹھی لٹکائی جاسکتی ہیں۔
- ۷۔ دس لاکھ سے بڑے کتنے اعداد ہندسوں ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ سے بن سکتے ہیں؟
- ۸۔ کتنی طرح سے n اشیا ف آدمیوں کو دی جاسکتی ہیں جبکہ ہر ایک آدمی کو کوئی سی تعداد اشیا دی جاسکے؟
- ۹۔ کتنی طرح سے پانچ اشیا دو آدمیوں میں تقسیم ہو سکتی ہیں؟
- ۱۰۔ اگر ذیل کے جملوں کو مفصل لکھا جائے تو معلوم کرو کہ ان کے حروف سے کل کتنی مختلف ترتیبیں بن سکتی ہیں (۱) ا ب ج (۲) ا ب ج د
- ۱۱۔ ایک قفل ایک در میں تین حلقے ہیں اور ہر ایک حلقے میں پندرہ

مختلف حرف ہیں معلوم کرو کہ کتنی طرح سے قفل کھولنے کی ناکام کوشش ہو سکتی ہے ؟

۱۲۔ پندرہ اصلاخ کے کثیر الاضلاع کے تین تین زاویوں کو ملانے سے کل کتنے مثلث بن سکتے ہیں ؟

۱۳۔ کسی کتب خانے میں ایک کتاب کے نسخے ہیں دو کتابوں میں سے ہر ایک کے 'ب' تین کتابوں میں سے ہر ایک کے 'ج' اور دو کتابوں کا صرف ایک ایک نسخہ ہے اگر یہ سب کی سب کتب ہیں اکٹھی پڑھنے کے لیے نکالی جائیں تو معلوم کرو کہ وہ کتنی طرح سے تقسیم ہو سکتی ہیں ؟

۱۴۔ آٹھ ہندسوں '۱'، '۲'، '۳'، '۴'، '۵'، '۶'، '۷' سے کتنے ایسے اعداد بن سکتے ہیں جو ۱ سے کم ہوں ؟

۱۵۔ کتنی طرح سے ذیل کے انعام ۲۰ لڑکوں کی ایک جماعت میں تقسیم ہو سکتے ہیں۔ عربی کا اول اور دوم، ریاضیات کا اول اور دوم، طبیعیات کا اول، اردو کا اول ؟

۱۶۔ کتنی طرح سے ۷ آدمی ایک حلقے میں بیٹھ سکتے ہیں اور کتنی طرح سے ۷ انگریز اور ۷ امریکن ایک گول میز کے گرد اس طرح بیٹھ سکتے ہیں کہ کوئی دو امریکن اکٹھے نہ ہوں ؟

۱۷۔ کتنی طرح سے ۷ مختلف موتی ایک ہار کی شکل میں پروئے جاسکتے ہیں۔

۱۸۔ کل سات حرف ہیں جن میں سے کچھ 'ا' ہیں اور باقی سب مختلف، اگر ان سب کو اکٹھا ترتیب دیا جائے تو ان سے کل ۲۱۰ لفظ بنتے ہیں معلوم کرو کہ کتنے ہیں۔

۱۹۔ ایک تھیلی میں سات انگریزی سکے ہیں ساورن، نصف ساورن، گراؤن، فلورن، شانگ، پنس، فاردنگ، کتنی طرح سے کوئی ایک رقم تھیلی میں سے نکالی جاسکتی ہے ؟

۲۰۔ ۳ مسلمان ۴ ہندو اور ۲ پارسیوں میں سے کل کتنے انتخاب ہو سکتے ہیں اگر ہر ایک مذہب کا کم از کم ایک آدمی منتخب کیا جائے؟
۲۱۔ م ن اشیا کون برابر حصوں میں تقسیم کرنے کے کل

مختلف طریقے دریافت کرو۔

۲۲۔ چار مختلف رنگ کی جھنڈیوں کو ایک دوسری پر اکٹھا کھڑا کرنے سے کل کتنے نشان بن سکتے ہیں اگر ان میں سے کوئی سی تعداد ایک وقت کھڑی کی جاسکے؟

نیز معلوم کرو کہ ۵ جھنڈیوں سے کتنے نشان بن سکتے ہیں؟

۲۳۔ لفظ "امتداد" کے حروف میں سے تین تین حروف کو

اکٹھا ترتیب دینے سے کل کتنے حرف بن سکتے ہیں؟

۲۴۔ ن خطوط مستقیم ایک سطح کو کئی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

اگر ان میں سے نہ تو کوئی دو متوازی ہوں اور نہ کوئی تین ایک نقطہ میں ملیں تو سطح کے حصوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۵۔ ایک سطح پر ف نقطے ہیں، ان میں سے کوئی تین ایک

خط مستقیم میں نہیں ہیں سوائے ق کے جو سب کے سب ایک ہی

خط مستقیم پر واقع ہیں، نقاط کو ملانے سے جو (۱) خطوط مستقیم (۲) مثلثات

پیدا ہوں ان کی تعداد دریافت کرو۔

۲۶۔ اگر ن مختلف کتابوں میں سے ہر ایک کتاب کے ف نسخے

ہوں تو ان میں سے کل ممکن انتخابوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۷۔ جملہ س ا ع ا پ ر ک ن دی کے حروف میں سے

چار چار حرف اکٹھے لینے سے جتنے اجتماع اور ترتیبیں بن سکیں ان کی

تعداد دریافت کرو۔

۲۸۔ جملہ ا ن ا ی ا ع ک م ٹ و کے حروف میں سے

چار چار حرف کی ترتیبوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۹۔ ا ن سب اعداد کا مجموعہ دریافت کرو جو ۱۰۰۰۰ سے بڑے

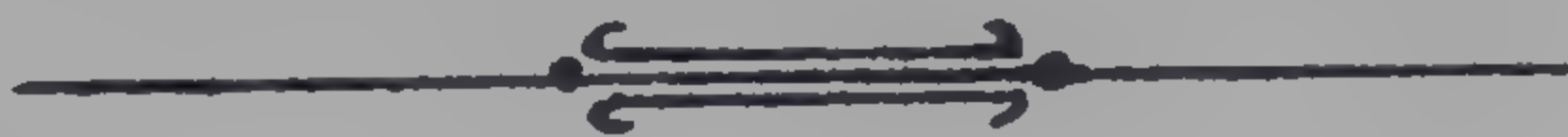
ہوں اور ان ہندسوں ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ کو استعمال کرنے سے نہیں اور جن میں کوئی ہندسہ مکرر نہ آئے۔

۳۰۔ ۱۰۰۰ سے بڑے ان سب اعداد کا مجموعہ دریافت کرو جو ہندسوں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ کو استعمال کرنے سے نہیں اور جن میں سے کسی میں کوئی ہندسہ مکرر نہ آئے۔

۳۱۔ اگر ف + ق + ر اشیا میں سے ف متشابہ اشیا ایک طرح کی ہوں ق متشابہ اشیا دوسری طرح کی اور باقی مختلف تو ثابت کرو کہ کل اجتماعوں کی تعداد (ف + ۱) (ق + ۱) (ر + ۱) ہے۔

۳۲۔ ۲۰ حروف میں صرف حروف لا اور ب شامل ہیں ثابت کرو کہ ترتیبوں کی تعداد بڑی سے بڑی اس وقت ہوگی جب حروف لا کی تعداد حروف ب کی تعداد کے برابر ہو۔

۳۳۔ اگر ن + ۱ اعداد لا، ب، ج، د، ... سب مختلف ہوں اور ان میں سے ہر ایک عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ جملہ لا، ب، ج، د، ... میں مختلف اجزائے ضربی کی تعداد (ن + ۱) - ۱ ہے۔



باب دوازدہم

استقراءے حسابیہ

۱۵۶۔ استقراءے حسابیہ کی مدد سے کسی مسئلہ عامہ کی صداقت اس کی کسی خاص صورت سے مستنبط ہوتی ہے، سب سے پہلے ہم اس بات کی تصدیق کرتے ہیں کہ مسئلہ مجوزہ چند سادہ صورتوں کے لیے صحیح ہے یا نہیں، اس کے بعد ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ اگر مسئلہ کسی ایک صورت کے لیے درست ہو تو اس سے اگلی صورت کے لیے لازماً درست ہوگا، جب یہ بات بخوبی قائم ہو جائے تو ہمیں معلوم ہوگا کہ اوپر کی تصدیق شدہ سادہ صورتوں سے اگلی صورت کے لیے مسئلہ صحیح ہے اور پھر اس سے اگلی صورت کے لیے اور علیٰ ہذا القیاس، اس طرح سے بعض اوقات ہم ایسے مسائل اور قوانین حسابیہ کی عمومیت ثابت کر سکتے ہیں جن کا ثبوت کسی طریق راست سے ملنا دشوار ہو۔

امثلہ ذیل سے اس ترکیب ثبوت کی بخوبی توضیح ہوگی۔
مثال ۱۔ ثابت کرو کہ پہلے n طبعی اعداد کے مکعبوں کا مجموعہ

$$\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\} \text{ ہے۔}$$

$\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]$ میں n کی بجائے عددی قیمتیں ۱ یا ۲ یا ۳ مندرج

کرنے سے معلوم ہوگا کہ مسئلہ $n = 1, 2, 3$ کے لیے صحیح ہے اس سے یہ قیاس پیدا ہوتا ہے کہ شاید n کی تمام قیمتوں کے لیے یہ مسئلہ صحیح ہو۔

یہ مان لو کہ مسئلہ n رقموں کے لیے صحیح ہے یعنی فرض کرو کہ

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

طرفین میں $(n+1)$ ویں رقم یعنی $(n+1)^3$ جمع کرو

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 + (n+1)^3$$

$$= \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 + (n+1)^3$$

$$= (n+1)^2 \left\{ 1 + n + \frac{n}{2} \right\}$$

$$= \frac{(n+1)^2 (2 + 2n + n)}{2}$$

$$= \left\{ \frac{(n+1)(2+n)}{2} \right\}^2$$

اور اس کی صورت وہی ہے جو ہم نے n رقموں کے مجموعے کے لیے فرض کی تھی صرف فرق یہ ہے کہ n کی بجائے $n+1$ لکھا ہوا ہے، دوسرے الفاظ میں یہ ثابت ہوا کہ اگر یہ نتیجہ کسی خاص تعداد ارقام کے لیے درست ہو، خواہ وہ تعداد ارقام کچھ ہی ہو، تو وہ اس وقت بھی درست ہوگا جبکہ تعداد ارقام کو بقدر ایک کے بڑھا دیا جائے۔ لیکن ہم جانتے ہیں کہ یہ نتیجہ تین رقموں کے لیے بھی درست ہے اس لیے معلوم ہوا کہ یہ چار رقموں کے لیے بھی درست ہے اس لیے پانچ رقموں کے لیے اور علیٰ ہذا القیاس۔ پس ثابت ہوا کہ یہ نتیجہ بالعموم درست ہے۔

مثال ۲۔ ن شنائی اجزائے ضربی (شکل لا + ا) معلوم ہیں
اُن کا حاصل ضرب دریافت کرو۔

عمل ضرب سے

$$\begin{aligned} & (لا + ا) (لا + ب) (لا + ج) = لا^۳ + (ا + ب + ج) لا^۲ + (اب + اج + با) لا + ا ب ج \\ & + (لا + ا) (لا + ب) (لا + د) = لا^۳ + (ا + ب + د) لا^۲ + (اب + اد + با) لا + ا ب د \\ & + (اب ج د + ا ب د ج + ا ج د ب + ا ج د ب) لا \\ & + ا ب ج د \end{aligned}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ ان نتائج سے مفصلہ ذیل قوانین صادق آتے ہیں۔
۱۔ بائیں طرف کی تعداد ارقام دائیں طرف کے اجزائے ضربی کی
تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہے۔

۲۔ پہلی رقم میں لا کا قوت نما اجزائے ضربی کی تعداد کے برابر ہے
اور باقی ہر ایک رقم میں لا کا قوت نما رقم ماقبل کے قوت نما سے بقدر
ایک کے کم ہے۔

۳۔ پہلی رقم کا سر ایک ہے، دوسری رقم کا سر کل حروف
ا، ب، ج، ... کا مجموعہ ہے، تیسری رقم کا سر انہی حروف میں سے
دو دو حرف کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے، چوتھی رقم کا سر انہی
حروف میں سے تین تین حرف کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے اور
علیٰ ہذا القیاس اور آخری رقم کا سر کل حروف کا حاصل ضرب ہے۔
مان لو کہ یہ قوانین ن۔ ۱ اجزائے ضربی کے لیے درست ہیں۔

یعنی فرض کرو کہ (لا + ا) (لا + ب) ... (لا + ح)

$$= لا^{ن-۱} + ض_۱ لا^{ن-۲} + ض_۲ لا^{ن-۳} + ... + ض_{ن-۱} لا + ض_ن$$

جہاں ض = ا + ب + ج + ... + ح

لیے بھی درست ہیں اس لیے چھ کے لیے اور علیٰ ہذا القیاس یعنی وہ بالعموم

درست ہیں اس لیے

(لا + ا) (لا + ب) (لا + ج) (لا + ک)

$$= لا + م^1 - لا + م^2 - لا + م^3 + + م^n$$

جہاں $م^1 =$ کل ن حروف لا ب ج ک کا مجموعہ
 $م^2 =$ ن حروف میں سے دو دو حرف کے حاصل ضربوں کا مجموعہ

$م^3 =$ کل ن حروف کا حاصل ضرب
 ۱۵۷۔ عمل تقسیم کے متعلق کئی ایسے مسائل ہیں جو استقرائے حسابیہ سے آسانی ثابت ہو سکتے ہیں۔
 مثال۔ ثابت کرو کہ ن کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لیے
 لا۔ ۱ جملہ لا۔ ۱ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

$$\text{عمل تقسیم سے } \frac{لا - ۱}{لا - ۱} = لا - ۱ + \frac{لا - ۱ - ۱}{لا - ۱}$$

اس سے معلوم ہوا کہ اگر لا۔ ۱ جملہ لا۔ ۱ پر پورا تقسیم ہو سکے تو لا۔ ۱ بھی لا۔ ۱ پر پورا تقسیم ہو سکیگا مگر لا۔ ۱ جملہ لا۔ ۱ پر پورا تقسیم ہوتا ہے اس لیے لا۔ ۱ بھی لا۔ ۱ پر تقسیم ہو سکتا ہے اس لیے لا۔ ۱ بھی اور علیٰ نذر القیاس پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۱۵۸۔ اس باب کی مثالوں سے ظاہر ہے کہ ترکیب استقرا صرف انہی مسائل کے ثابت کرنے میں استعمال ہو سکتی ہے جن میں طبعی اعداد ۱، ۲، ۳ ن کی ترتیب کے موافق مسلسل صورتیں پیدا ہوں۔

امثلہ نمبری ۱۲

استقرائے حسابیہ سے ثابت کرو کہ

$$1 - 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

$$2 - 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{4} n (n+1) (1+n)$$

$$3 - 3 + 2 + 2 + \dots + 2 = 2n - 1$$

$$4 - \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

۵۔ اگر ن جفت ہو تو استقرائے حسابیہ سے ثابت کرو کہ

لا۔ مان جملہ لا + ما پر پورا پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔



باب سیزدہم

مسئلہ ثنائی

۱۵۹۔ ضرب دینے سے ظاہر ہے کہ

$$(لا + ل) (لا + ب) (لا + ج) (لا + د) = لا + (لا + ب + ج + د) (لا + ل)$$

$$+ (لا + ب + ج + د + ل) (لا + ل) + (لا + ب + ج + د + ل + ل) (لا + ل)$$

$$+ (لا + ب + ج + د + ل + ل + ل) (لا + ل) + (لا + ب + ج + د + ل + ل + ل + ل) (لا + ل) + \dots (۱)$$

مگر سری نظر سے ہم اس نتیجہ پر پہنچ سکتے ہیں کیونکہ دیے ہوئے چار اجزائے ضربی کا مکمل حاصل ضرب ان جزوی حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے جو دائیں طرف کے چار اجزائے ضربی میں ہر ایک سے ایک ایک حرف منتخب کرنے اور ان کو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔ اگر ہم مختلف جزوی حاصل ضربوں کی تکوین پر غور کریں تو معلوم ہوگا کہ

(۱) رقم لا ہر ایک جزو ضربی سے حرف لا لینے سے بنتی ہے

(۲) ارتقام جن میں لا شامل ہے اس طرح بنتی ہیں کہ تمام ممکن طریقوں سے حرف لا کو کسی تین اجزائے ضربی میں سے منتخب کیا جائے اور ساتھ ہی حروف لا، ب، ج، د میں سے ایک حرف کو باقی ماندہ جزو ضربی سے لیا جائے۔

(۳) ارتقام جن میں لا شامل ہے اس طرح بنتی ہیں کہ حرف لا کو کل ممکن طریقوں سے کسی دو اجزائے ضربی میں سے منتخب کیا جائے

اور ساتھ ہی حروف 'ا' 'ب' 'ج' 'د' میں سے دو حروف کو باقی ماندہ دو اجزائے ضربی سے لیا جائے۔

(۴) ارتقام جن میں لا شامل ہے حرف لا کو کسی ایک جزو ضربی سے اور حروف 'ا' 'ب' 'ج' 'د' میں سے تین حروف کو باقی ماندہ اجزائے ضربی سے کل ممکن طریقوں سے لینے سے بنتی ہیں۔

(۵) رقم مطلق یعنی وہ رقم جس میں لا شامل نہ ہو کل حروف 'ا' 'ب' 'ج' 'د' کا حاصل ضرب ہے۔

مثال ۱۔ (۲-۱۱) (۳+۱۱) (۵-۱۱) (۹+۱۱)

$$= لا + لا (۲-۳+۵-۹) + لا (۲-۳+۵-۹+۱۱-۱۱-۱۱+۱۱) + لا (۲-۳+۵-۹+۱۱-۱۱-۱۱+۱۱-۱۱+۱۱)$$

$$+ لا (۲-۳+۵-۹+۱۱-۱۱-۱۱+۱۱-۱۱+۱۱-۱۱+۱۱)$$

$$= لا + لا ۵ - لا ۴ - لا ۶ + لا ۲۴۰$$

مثال ۲۔ حاصل ضرب (۳-۱۱) (۵+۱۱) (۱-۱۱) (۲+۱۱) (۸-۱۱)

میں لا کا عددی سرور یافتہ کرو۔

ارتقام جن میں لا شامل ہے کسی تین اجزائے ضربی کے حروف "لا" کو باقی ماندہ دو اجزائے ضربی کی دو عددی مقادیر کے ساتھ ضرب دینے سے بنتی ہیں۔ اس لیے عددی سر مطلوب مقادیر ۳، ۵، ۱، ۲، ۸ میں سے دو دو کے حاصل ضرب کے مجموعے برابر ہے۔

$$سر مطلوب = ۱۵ - ۳ + ۶ - ۲۲ + ۵ - ۱۰ + ۲ - ۴۰ - ۸ + ۱۶$$

$$= -۳۹$$

۱۶۰۔ اگر دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) میں فرض کریں کہ

$$ب = ج = د = لا تو حاصل ہوگا$$

$$(لا + لا) = لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا$$

ایک عام نتیجے سے اس کی خاص صورت مستنبط کرنے کی ترکیب جو اوپر بیان ہوئی اکثر علم ریاضی میں کام آتی ہے کیونکہ کئی مرتبہ

ایک مسئلہ عامہ کا ثابت کرنا اس کی خاص صورتوں کے ثابت کرنے سے زیادہ آسان ہوتا ہے۔ دفعہ ذیل میں ہم مسئلہ شنائی کو اسی طریقے سے ثابت کریں گے۔ مسئلہ مذکورہ کی استعانت سے جملہ شنائی جس کی صورت عامہ لا + لا ہے کسی مثبت صحیح قوت پر اکھٹایا جاسکتا ہے۔

۱۶۱۔ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو جملہ (لا + لا) کی صورت

تفصیلی دریافت کرو۔

جملہ (لا + لا) (لا + ب) (لا + ج) (لا + ک) پر غور کرو اس میں اجزائے ضربی کی تعداد ن ہے۔

جملہ مذکورہ کی صورت تفصیلی ن اجزائے ضربی لا + لا + ب، لا + ج، لا + ک کا متواتر حاصل ضرب ہے اور اس میں ہر ایک رقم کے قوت نماؤں کا مجموعہ ن ہے کیونکہ یہ رقم ن حروف کے باہم ضرب ہونے سے اس طرح حاصل ہوتی ہے کہ مندرجہ بالا ن اجزائے ضربی میں سے ہر ایک جزو ضربی سے صرف ایک ایک حرف کو منتخب کیا جائے۔

لا کی سب سے اعلیٰ قوت لا ہے اور یہ ن اجزائے ضربی میں سے ہر ایک سے حرف لا لینے اور ان سب کو اکھٹا ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

وہ ارقام جن میں لا^۱ شامل ہے اس طرح بنتی ہیں:۔
حرف لا کو کسی ن۔ ۱ اجزائے ضربی سے لو اور حروف لا ب ج د ک میں سے ایک حرف کو باقی ماندہ جزو ضربی سے لے کر ان سب حروف کو اکھٹا ضرب دو اس طرح سے آخری حاصل ضرب میں لا^۱۔ ۱ کا سر حروف لا ب ج د ک کے مجموعے کے برابر ہو گا اس کو ص سے تعبیر کرو۔

ارقام جن میں لا^۲ شامل ہے اس طرح بنتی ہیں:۔
حرف لا کو کسی ن۔ ۲ اجزائے ضربی سے لو اور حروف لا ب ج د ک

اور پنج، پنج..... کی جگہ ان کی قیمتیں رکھنے سے

$$(1 + 1)^n = 1^n + n \cdot 1^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2 \times 1} 1^{n-2} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} 1^{n-3} + \dots + 1^n$$

اس سلسلہ میں تعداد ارتقام $n + 1$ ہے
ضابطہ مندرجہ بالا کو مسئلہ ثنائی کے پیام سے موسوم کرتے ہیں اور بائیں
طرف کے سلسلہ کو $(1 + 1)^n$ کی صورت تفصیلی کہتے ہیں۔
نتیجہ صریح - 1 کی جگہ $(1 - 1)$ رکھنے سے

$$\{ (1 - 1) + 1 \}^n = 1^n + n \cdot 1^{n-1} (1 - 1) + \frac{n(n-1)}{2 \times 1} 1^{n-2} (1 - 1)^2 + \dots + (1 - 1)^n$$

$$+ \dots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} 1^{n-3} (1 - 1)^3 + \dots + (1 - 1)^n$$

$$\text{یعنی } (1 - 1)^n = 1^n - n \cdot 1^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2 \times 1} 1^{n-2} - \dots + (1 - 1)^n$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} 1^{n-3} + \dots + (1 - 1)^n$$

پس معلوم ہوا کہ ارتقام یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہیں اور
رقم آخر مثبت ہوگی اگر n جفت ہو اور منفی ہوگی اگر n طاق ہو۔
نتیجہ صریح ۲ - 1 کی جگہ ایک اور 1 کی جگہ 1 رکھنے سے

$$(1 + 1)^n = 1^n + n \cdot 1^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2 \times 1} 1^{n-2} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} 1^{n-3} + \dots + 1^n$$

$$= 1 + n \cdot 1 + \frac{n(n-1)}{2 \times 1} 1 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} 1 + \dots + 1^n$$

اسی طرح سے $(1 - 1)^n$

$$= 1 - n \cdot 1 + \frac{n(n-1)}{2 \times 1} 1 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} 1 + \dots + (1 - 1)^n$$

نتیجہ ضرب ۳ - چونکہ $(1 + \frac{1}{n})^n = \{ (1 + \frac{1}{n})^n \} = \{ (1 + \frac{1}{n})^n \}$

اس لیے $(1 + \frac{1}{n})^n = \{ (1 + \frac{1}{n})^n \} = \{ (1 + \frac{1}{n})^n \}$

$\{ (1 + \frac{1}{n})^n \} = \{ (1 + \frac{1}{n})^n \} = \{ (1 + \frac{1}{n})^n \}$

اسی طرح سے $(1 - \frac{1}{n})^n = \{ (1 - \frac{1}{n})^n \} = \{ (1 - \frac{1}{n})^n \}$

$\{ (1 - \frac{1}{n})^n \} = \{ (1 - \frac{1}{n})^n \} = \{ (1 - \frac{1}{n})^n \}$

۱۶۲ - مسئلہ ثنائی مثبت صحیح قوت نما کی صورت میں استقرائے حجابہ سے اس طرح ثابت ہو سکتا ہے۔

مسئلہ کی صداقت قوت نما ن کے لیے مان لو
یعنی مان لو کہ

$(1 + \frac{1}{n})^n = \{ (1 + \frac{1}{n})^n \} = \{ (1 + \frac{1}{n})^n \}$

جہاں $\{ (1 + \frac{1}{n})^n \} = \{ (1 + \frac{1}{n})^n \} = \{ (1 + \frac{1}{n})^n \}$

طرفین کو لا + ر میں ضرب دیتے سے

$(1 + \frac{1}{n})^{n+1} = \{ (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \} = \{ (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \}$

$\{ (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \} = \{ (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \} = \{ (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \}$

$\{ (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \} = \{ (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \} = \{ (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \}$

$$1C_{1+0} = 1C_0 + 1C_0 = 1 + 1C_0$$

$$J_{i+n} = J_0 + J_n$$

$$rC_{1+n} = rC_0 + rC_n$$

$$\therefore (1 + a)^n = a^{n+1} + a^{n+2} + a^{n+3} + \dots + a^{n-1} + a^n + 1$$

$$\dots + \frac{1}{n+1} + \dots$$

پس معلوم ہوا کہ اگر سُلّہ قوت نما ن کے لیے صحیح ہو تو یہ قوت نما
ن + ۱ کے لیے بھی صحیح ہوتا ہے لیکن یہ قوت نما ۲ کے لیے صحیح

ہجہ کیونکہ $(1 + 11) = 12$ $\frac{1 \times 12}{12 \times 1} + 11 \times 1 + 11 = 12$

$$y + 0.5r + u =$$

اس لیے مسئلہ قوت نما ۳ کے لیے صحیح ہے۔

اس لیے مسئلہ قوتِ نماز کے لیے مجمع ہے اور علیٰ ہذا القیاس

ثابت ہوا کہ مسئلہ شنائی تمام مثبت صحیح قوت مناؤں کے لیے صحیح ہے

۱۶۳۔ مسئلہ شنائی کا ایک عمدہ مختصر ثبوت یہ بھی ہے

$(1 + \lambda)^n = (1 + \lambda)(1 + \lambda)(1 + \lambda) \dots (1 + \lambda)$ اجزاء کے ضربی تک

ظاہر ہے کہ مندرجہ بالا ان اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ان میں درجہ کا ایک متجانس جملہ ہے اور اس کی ہر رقم ان اجزائے ضربی میں سے ہر ایک سے ایک اور حرف ایک حرف لے کر ان سب کو آپس میں ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

پس ہر ایسی رقم جس میں لا^۱ و لا^۲ شامل ہو اس طرح حاصل ہوتی ہے کہ کسی ر اجزائے ضربی سے حرف لا^۱ اور باقی ماندہ ن۔ ر اجزائے ضربی میں سے حرف لا^۲ لے کر ان سب حروف کو اکٹھا ضرب دیا جائے۔

پس معلوم ہوا کہ جن ارقام میں لا^۱ و لا^۲ شامل ہے ان کی تعداد ن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد کے برابر ہے اس لیے لا^۱ و لا^۲ کا سر شمار ہے اور ر کو قیمتیں ۱، ۲، ۳، ...، ن بالترتیب دینے سے سب رقموں کے سر حاصل ہوتے ہیں۔

$$ن(لا + لا) = لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + ... + لا^۲ + لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + ... + لا^۲ + لا^۱$$

$$= لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + ... + لا^۲ + لا^۱ + \frac{ن(ن-۱)}{۲} لا^۲ + ... + \frac{ن(ن-۱)}{۲} لا^۲ + لا^۱$$

$$+ \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۶} لا^۳ + ... + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۶} لا^۳ + لا^۱$$

مثال (۱)۔ (لا + لا) کی صورت تفصیلی دریافت کرو۔

مسئلہ ثنائی کی مدد سے

$$(لا + لا) = لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸ + لا^۹ + لا^{۱۰} + لا^{۱۱} + لا^{۱۲} + لا^{۱۳} + لا^{۱۴} + لا^{۱۵} + لا^{۱۶} + لا^{۱۷} + لا^{۱۸} + لا^{۱۹} + لا^{۲۰} + لا^{۲۱} + لا^{۲۲} + لا^{۲۳} + لا^{۲۴} + لا^{۲۵} + لا^{۲۶} + لا^{۲۷} + لا^{۲۸} + لا^{۲۹} + لا^{۳۰}$$

اور ہنچ، ہنچ، ہنچ کی قیمتیں مندرجہ کرنے سے

$$= لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸ + لا^۹ + لا^{۱۰} + لا^{۱۱} + لا^{۱۲} + لا^{۱۳} + لا^{۱۴} + لا^{۱۵} + لا^{۱۶} + لا^{۱۷} + لا^{۱۸} + لا^{۱۹} + لا^{۲۰} + لا^{۲۱} + لا^{۲۲} + لا^{۲۳} + لا^{۲۴} + لا^{۲۵} + لا^{۲۶} + لا^{۲۷} + لا^{۲۸} + لا^{۲۹} + لا^{۳۰}$$

$$(r - \lambda_2) = -\lambda_2 + \lambda_2 = 0$$

راجہ = راجہ اور راجہ = راجہ وغیرہ اس لیے

$$r(r-1) \cdot \frac{r \times r}{r \times 1} + (r-1) \cdot r - r = (r-1)$$

$$\dots + (v_r) \tilde{y} \frac{\Delta x_4 x_4}{r x_2 x_1} -$$

$$(\psi_2) \tilde{J}_{35} - (\psi_2) \tilde{J}_{21} + (\psi_2) \tilde{J}_4 - \tilde{J}_5 =$$

$$(\psi_2) - (\psi_2) \psi_4 + (\psi_2) \psi_1 - (\psi_2) \psi_{35} +$$

$$\psi^2_{34} + \psi^2_{28} - \psi^2_{18} + \psi^2_{14} - \psi^2 =$$

$${}^4U_{122} - {}^4U_{3322} + {}^0U_{3344} -$$

مثال (۳) - $(1 + \sqrt{1-x}) + (1 - \sqrt{1-x})$ کی قیمت دریافت کرو۔

اس مثال میں ایسی دو تفصیلی صورتیں ہیں جن کی ارقام عددی قیمت میں برابر ہیں لیکن دوسری تفصیلی صورت میں دوسری 'چوتھی'، 'چھٹی'، 'اٹھویں' رقمیں منفی ہیں اور اس لیے پہلی صورت تفصیلی کی رقم مثلاً کونا بود کردیتی ہیں۔

اس لیے مطلوبہ قیمت = $\{ 2 + 21r + (1-r)35 \}$

$$\{(1-5)14+$$

$$(4 - 307 + 3112 - 345) \cdot 12 =$$

۱۶۴۔ (۱+۱) کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو۔

دوسری رقم = $n - 1$

تیسری رقم = $n - 2$

چوتھی رقم = $n - 3$

پانچویں رقم = $n - 4$

اور علیٰ ہذا تقیاس

اس سے ظاہر ہے کہ ہر ایک رقم میں n کا عدد آخر اس رقم کی تعداد سے جو شروع سلسلہ سے اس رقم تک ہو، بقدر ایک کے کم ہے اور 1 کا قوت نماوی ہے جو n کا عدد آخر ہے نیز 1 اور 1 کے قوت نماؤں کا مجموعہ n ہے۔ اس لیے $(1 + r)$ ویں رقم = $n - r$

اس کو سلسلہ کی رقم عامہ کہتے ہیں اور اس کی وجہ یہ ہے کہ

اس میں r کو مناسب عددی قیمتیں دینے سے ہم صورت تفصیلی کی کوئی سی رقم دریافت کر سکتے ہیں۔

اپس $(1 + r)$ ویں رقم

$$= n - r$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{r!}$$

اگر $(1 - r)$ کی رقم عامہ مطلوب ہو تو ہمیں 1 کی بجائے (-1) لکھنا چاہیے

مثال (۱) - $(1 + 2)$ کی پانچویں رقم دریافت کرو۔

$$\text{رقم مطلوبہ} = 2^4 \times (2 - 4) = 16 \times (-2) = -32$$

$$= \frac{12 \times 15 \times 16 \times 14}{2 \times 3 \times 4 \times 1} \times 12 \times 13 \times 14$$

$$= 80.80 \times 12 \times 13 \times 14$$

مثال (۲) - (۱ - لا) کی ۴۹ ویں رقم دریافت کرو۔
رقم مطلوبہ = ۴۹ (۱ - لا)

$$= ۴۹ (۱ - لا)$$

$$= \frac{۴۹ \times ۵۰}{۲ \times ۱} (۱ - لا)$$

$$= ۱۲۲۵ (۱ - لا)$$

مثال (۳) - (ما + س) کی صورت تفصیلی میں ماکاسر دریافت کرو۔
فرض کرو جملہ مذکور کے پھیلاؤ کی (۱ + ر) ویں رقم میں ما واقع ہوتا ہے۔

$$\text{چونکہ } (۱ + ر) \text{ ویں رقم} = ۴۹ (ما) - ۱ (س) \text{ ہے}$$

$$= ۴۹ س - ۱۰ - ۳$$

اور اگر اس میں ما کی صرف پہلی قوت شامل ہو تو ضروری ہے کہ

$$۱۰ - ۳ = ر = ۷$$

$$\text{اس لیے سر مطلوب} = ۴۹ \times ۷$$

$$= ۳۴۳$$

$$= ۴۹ \times ۷$$

$$= ۱۰ س$$

مثال (۴) - (لا - لا) کی صورت تفصیلی میں لا کاسر دریافت کرو

$$\text{اب } (لا - لا) = لا (۱ - \frac{۲}{۱})$$

اور چونکہ (۱ - $\frac{۲}{۱۱}$) کی صورت تفصیلی کی ہر ایک رقم کو لا^۲ سے ضرب دینی پڑتی ہے اس لیے ہمیں اس صورت تفصیلی میں اس رقم کا سر دریافت کرنا ہے جس میں $\frac{۱}{۱۱}$ شامل ہو۔

اس لیے سر مطلوب = پنجہ (۲ - ۱)

$$۱۶ \times \frac{۷ \times ۸ \times ۹ \times ۱۰}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۳۳۶۰ =$$

مثال (۵) - (۱۱ - $\frac{۱}{۱۱}$) کی صورت تفصیلی میں وہ رقم دریافت

کرو جس میں لا شامل نہ ہو۔

فرض کرو کہ (۱ + ر) میں رقم میں لا شامل نہیں ہوتا۔
تب چونکہ (۱ + ر) میں رقم

$$= \text{پنجہ ر} \times \text{لا}^{۳-ن} \times (1 - \frac{1}{11})$$

$$= \text{پنجہ ر} \times (1 - \frac{1}{11}) \times \text{لا}^{۳-ن}$$

اس لیے لازماً ۳ - ۳ = ۰ اور اس لیے ر = ن

پس رقم مطلوبہ = پنجہ ر $\times (1 - \frac{1}{11})$

$$= \text{پنجہ ن} \times (1 - \frac{1}{11})$$

$$= \frac{\text{ان}^{۳}}{\text{ان}^{۲}} \times (1 - \frac{1}{11})$$

مثال (۶) - (لا^۲ + $\frac{۱}{۱۱}$) کی صورت تفصیلی میں لا کا سر دریافت کرو

فرض کرو کہ صورت تفصیلی کی (ع + ۱) ویں رقم میں لا واقع ہوتا ہے۔

$$\text{تب (ع + ۱) ویں رقم} = \text{ن شاع (لا)}^{\text{ن-ع}} \left(\frac{۱}{۳} \right)^{\text{ع}}$$

$$= \text{ن شاع لا}^{\text{ن-ع-۵}}$$

لیکن جیسا ہم نے فرض کیا کہ اس رقم میں لا شامل ہوتا ہے اس لیے

$$\text{ن}^۲ - \text{ع}۵ = \text{ریا ع} = \frac{\text{ن}^۲ - \text{ر}}{۵}$$

$$\text{پس سر مطلوب} = \text{ن شاع} = \frac{\text{ن شاع}^{\text{ن-ع-۵}}}{۵}$$

$$\frac{\text{ن}}{\left(\frac{۱}{۵} (\text{ن}^۲ - \text{ر}) \right) \left(\frac{۱}{۵} (\text{ن}^۳ + \text{ر}) \right)} =$$

اگر $\text{ن}^۲ - \text{ر}$ مثبت صحیح عدد نہ ہو تو صورت تفصیلی میں ایسی کوئی رقم نہ ہوگی جس میں لا شامل ہو۔

امثلہ نمبری ۱۳

ذیل کے ثنائی جملوں کو بھیلو

- | | |
|--------------|---------------|
| ۱- (لا - ۳) | ۲- (۳ لا + ۲) |
| ۳- (لا - ۲) | ۴- (۱ - ۳ و) |
| ۵- (لا + لا) | ۶- (۱ - لا) |
| ۷- (۲ - لا) | ۸- (۳ - لا) |
| ۹- (۱ + لا) | ۱۰- (لا - لا) |
| ۱۱- (۱ + لا) | ۱۲- (لا - لا) |

۱۳- $(۱ + لا) = ۱ + ۱$ (ایسی ارقام جن میں جزو ضربی ن شامل ہے) + لا

اس میں فرض کرو کہ $ن = (۱ + لا)$ تو $۱ + ۱ = ۱ + لا$ یعنی $۱ + ۱ = ۱$ معلوم کرو کہ غلطی کہاں ہے؟
ذیل کے جلوں کی ارقام مطلوبہ کو لکھو اور مختصر کرو۔

۱۴- $(۵ - لا)$ کی چوتھی رقم

۱۵- $(۱ - لا۲)$ کی دسویں رقم

۱۶- $(۱ - لا۲)$ کی بارہویں رقم

۱۷- $(۵ لا + ۸)$ کی ۲۸ ویں رقم

۱۸- $(۱ + ۹ ب)$ کی چوتھی رقم

۱۹- $(۱۲ - ۱۳)$ کی پانچویں رقم

۲۰- $(\frac{۵}{۵۲} - \frac{۵۴}{۵})$ کی ساتویں رقم

۲۱- $(\frac{۴۵}{۴۰} - \frac{۴۶}{۴۰})$ کی پانچویں رقم

ذیل کے جلوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

۲۲- $(۲۷ + لا) + (۲۷ - لا)$

۲۳- $(۲۷ لا + لا) - (۲۷ لا - لا)$

۲۴- $(۱ + ۲۷) - (۱ - ۲۷)$

۲۵- $(۲ - لا - لا) + (۲ + لا - لا)$

۲۶- $(\frac{۵}{۵} + \frac{۱}{۵})$ کی درمیانی رقم دریافت کرو

۲۷- $(۱ - \frac{۵}{۵})$ کی درمیانی رقم دریافت کرو

۲۸- $(۱۳ - \frac{۱۳}{۴})$ کی دو درمیانی رقمیں دریافت کرو

۲۹- $(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2})$ میں λ^2 کا سر دریافت کرو۔

۳۰- $(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2})$ میں λ^2 کا سر دریافت کرو۔

۳۱- $(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^3})$ میں λ^3 اور λ^2 کے سر دریافت کرو۔

۳۲- $(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^4})$ کی ۳ ویں رقم دریافت کرو۔

۳۳- $(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^3})$ کی وہ رقم دریافت کرو جس میں λ شامل نہ ہو۔

۳۴- اگر $(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2})$ کی صورت تفصیلی میں λ واقع ہو تو اس کا سر دریافت کرو۔

۳۵- $(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^3})$ کی صورت تفصیلی میں وہ رقم دریافت کرو جس میں λ شامل نہ ہو۔

۳۶- اگر $(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2})$ کی صورت تفصیلی میں λ^2 واقع ہو تو ثابت

۲۱

کرو کہ اس کا سر = $\frac{1}{\lambda} (1 - \lambda^{2n})$ $\frac{1}{\lambda} (1 + \lambda^{2n})$

۱۶۵- $(1 + \lambda)$ کی صورت تفصیلی میں شروع اور اخیر سے متساوی الفصل رقموں کے سر برابر ہوتے ہیں۔

شروع $(1 + r)$ ویں رقم کا سر = n شمار

ظاہر ہے کہ اخیر سے $(1 + r)$ ویں رقم کے پہلے $n + 1 - (1 + r)$ یا $n - r$ رقمیں ہوں گی اس لیے اخیر سے $(1 + r)$ ویں رقم شروع سے

(ن + ر + ۱) دیں رقم ہوگی اور اس کا سر نہان ہوگا۔

اب چونکہ $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$ اس لیے مسئلہ ثابت ہوا۔

۱۶۶۔ (۱ + لا) کی صورت تفصیلی میں سب سے بڑا سر دریافت کرو۔

(۱ + لا) کی رقم عامہ کا سر نہان ہے اور ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ
ر کی کس قیمت کے لیے اس کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہوگی۔
بموجب دفعہ ۱۶۹ اگر ن جفت ہو تو سب سے بڑا سر نہان ہے۔

اور اگر ن طاق ہو تو سب سے بڑا سر نہان یا $\frac{1}{\lambda}$ ہے۔

اور یہ دونوں سر آپس میں برابر ہیں

۱۶۷۔ (۱ + لا) کی صورت تفصیلی میں سب سے بڑی رقم دریافت کرو۔

$$(1 + \lambda) = \lambda \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$$

چونکہ لا سے جملہ $\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$ کی ہر ایک رقم ضرب دی جاتی ہے۔

اس لیے کافی ہوگا کہ ہم صرف جملہ $\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$ کی صورت تفصیلی میں
بڑی سے بڑی رقم دریافت کریں۔

اگر قدر اور قدر ۱ اس جملہ کی ر دیں اور (۱ + ر) دیں رقموں کو

$$\text{بالترتیب تعبیر کریں تو قدر ۱} = \frac{1}{\lambda} \times \frac{1 + \lambda - \lambda}{\lambda} \times \text{قدر}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{1 + \lambda}{\lambda}\right) \times \text{قدر}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے ر بڑھتا ہے ویسے جزو ضربی $\left(1 - \frac{1 + \lambda}{\lambda}\right)$

گھٹتا ہے اس لیے معلوم ہوا کہ (۱ + ر) دیں رقم ر دیں رقم سے ہمیشہ
بڑی نہیں ہو سکتی، لیکن اس وقت تک ضرور بڑی رہتی ہے جب تک کہ

$(\frac{1}{l} - \frac{1}{n+1})$ ایک کے برابر یا ایک سے کم نہ ہو جائے۔

اب $(\frac{1}{l} - \frac{1}{n+1}) < 1$

جب تک کہ $(\frac{1}{l} - \frac{1}{n+1}) < \frac{1}{l}$

یعنی $\frac{1}{l} < 1 + \frac{1}{l}$

یا $\frac{1}{l} < \frac{1+n}{1+l}$ (۱)

اگر $\frac{1+n}{1+l}$ صحیح عدد ہو تو اس کو ع سے تعبیر کرو

اب اگر $r = ع$ تو ضارب جزو ضربی $\frac{1+n-r}{r} (\frac{1}{l})$ ایک

کے برابر ہو جاتا ہے اور $(1+ع)$ دیں رقم ع دیں رقم کے برابر ہے اور یہی دو رقمیں باقی سب سے بڑی ہیں۔

اگر $\frac{1+n}{1+l}$ صحیح عدد نہ ہو تو اس کے صحیح حصہ کو ک سے تعبیر کرو

اب r کی بڑی سے بڑی قیمت جو غیر مساوات (۱) کے مطابق ہے۔

صریحاً ک ہے پس معلوم ہوا کہ $(1+ک)$ دیں رقم سب سے بڑی ہے

چونکہ ہمیں بلحاظ عددی قیمت کے سب سے بڑی رقم مطلوب

ہے اس لیے جملہ $(1-l)$ کے لیے بھی اوپر کا ثبوت کافی

ہوگا۔ پس کسی مثال حسابیہ میں جملہ ثنائی کی دوسری رقم کی علامت

کا خیال رکھنا ضروری نہیں ہے۔ بہتر ہوگا کہ ہر ایک مثال بغیر

قاعدہ عامہ کی مدد کے نکالی جائے۔

مثال (۱)۔ اگر $l = \frac{1}{p}$ تو $(1+l)$ کے پھیلاؤ میں سب سے

بڑی رقم دریافت کرو۔

ر دیں اور (۱ + ر) ویں رقموں کو بالترتیب قدر اور قدر سے تعبیر کرو، تب

$$\text{قدر} + ۱ = \frac{۱ + ر - ۸}{ر} \times ۴ \times \text{قدر}$$

$$= \frac{۱ - ۹}{ر} \times \frac{۴}{۳} \times \text{قدر}$$

اس لیے $\text{قدر} + ۱ < \text{قدر}$

جب تک کہ $\frac{۱ - ۹}{ر} \times \frac{۴}{۳} < ۱$

یعنی $۳۶ - ۴ر < ۳ر$

یا $۳۶ < ۷ر$

ر کی بڑی سے بڑی قیمت جو اس غیر مساوات کو پورا کرتی ہے، ۵ ہے۔ پس معلوم ہوا کہ چھٹی رقم سب سے بڑی ہے اور اس کی قیمت

$$= ۵ \times \left(\frac{۴}{۳}\right)^۵ = ۵۷۳۴۴$$

$$\frac{۵۷۳۴۴}{۲۴۳}$$

مثال (۲)۔ اگر $\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲} + ۳$ تو (۲ + ۳ لا) کی صورت تفصیلی میں بڑی سے بڑی رقم دریافت کرو۔

$$\frac{۱}{۲} = \left(\frac{۱}{۲} + ۳\right) \times \frac{۱}{۲}$$

اس لیے اگر ر دیں اور (۱ + ر) ویں رقموں کو بالترتیب قدر اور قدر سے تعبیر کریں تو

$$\text{قدر} + ۱ = \frac{۱ + ر - ۹}{ر} \times \frac{۱}{۲} \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^۵$$

$$= \frac{۱ - ۱۰}{ر} \times \frac{۱}{۲} \times \text{قدر}$$

اس لیے $ق + ۱ < ق$

جب تک کہ $\frac{۱۰-۱}{۲} \times \frac{۳}{۲} < ۱$

یعنی $\frac{۱۰-۱}{۲} \times \frac{۳}{۲} < ۱$

یا $\frac{۳۰}{۱۱} < ۲$

اس غیر مساوات کے موافق $ر$ کی بڑی سے بڑی قیمت ۲ ہے
اس لیے معلوم ہوا کہ تیسری رتقم سب سے بڑی ہے اور اس کی قیمت

$$\frac{۳}{۲} \times \frac{۸ \times ۹}{۲ \times ۱} \times ۲^۹ = \left(\frac{۳}{۲} \right) \times \frac{۸ \times ۹}{۲ \times ۱} \times ۲^۹ =$$

$$۲۵۹۲ = \frac{۸۱ \times ۲^۹}{۲} =$$

مثال (۳)۔ اگر $لا = ۳$ اور ۲ (لا) کی صورت تفصیلی میں سب
سے بڑی رتقم دریافت کرو۔

$$(۳ - ۲) = ۱ \quad ۳^۹ = \left(\frac{۳}{۲} - ۱ \right) ۳^۹$$

پس $\left(\frac{۳}{۲} - ۱ \right)$ کی صورت تفصیلی پر ہی غور کرنا کافی ہوگا اس جگہ

بلحاظ عددی قیمت کے $ق + ۱ = \frac{۱۰-۱}{۲} \times \frac{۳}{۲} \times ق$ عدداً

$$= \frac{۱۰-۱}{۲} \times \frac{۳}{۲} \times ق$$

اس لیے $ق + ۱ < ق$

جب تک کہ $\frac{۱۰-۱}{۲} \times \frac{۳}{۲} < ۱$

یعنی $۲۰ < ۱۵$

اس لیے $ر = ۱, ۲, ۳$ کے لیے $ق + ۱ < ق$ لیکن اگر

۱۔ ہم تو $ق + ر + ۱ = ق$ راوریہی سب سے بڑی رقمیں ہیں میں معلوم ہوا کہ چوتھی اور پانچویں رقمیں عددی قیمت میں مساوی ہیں اور باقی سب رقموں سے بڑی ہیں اور ان کی قیمت

$$= ۳ \times ۱۰۰۰ \times \left(\frac{۲}{۱۰}\right)^۳$$

$$= ۳ \times ۸۴ \times ۸ = ۱۹۸۸۸$$

۱۶۸۔ $(۱ + ل)$ کی صورت تفصیلی میں ارقام کے سروں کا مجموعہ دریافت کرو۔

مساوات متماثلہ $(۱ + ل) = ۱ + ۱۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰۰ + \dots + ۱۰^{ن-۱}$ میں لا کو ایک کے مساوی رکھنے سے

$۱ + ۱۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰۰ + \dots + ۱۰^{ن-۱} = ۱۰^{ن} - ۱$ اس میں ۱۰ کی جگہ ۱۰ اختصاراً لکھا گیا ہے۔

نتیجہ صریح۔ $۱۰^{ن-۱} + ۱۰^{ن-۲} + ۱۰^{ن-۳} + \dots + ۱۰ + ۱ = ۱۰^{ن} - ۱$ یعنی "ن اشیا کے کل اجتماعوں کی تعداد" $۱۰^{ن} - ۱$ ہے [دفعہ ۱۴۸]

۱۶۹۔ ثابت کرو کہ $(۱ + ل)$ کی صورت تفصیلی میں جفت رقموں کے سروں کا مجموعہ طاق رقموں کے سروں کے مجموعہ کے برابر ہے۔

$(۱ + ل) = ۱ + ۱۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰۰ + \dots + ۱۰^{ن-۱}$ یہ ایک مساوات متماثلہ ہے اس میں فرض کرو کہ $۱ = ۱ - ۱$ پس

$$= ۱ - ۱ + ۱۰ - ۱۰ + ۱۰۰ - ۱۰۰ + ۱۰۰۰ - ۱۰۰۰ + \dots$$

اس لیے $۱ + ۱۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰۰ + \dots + ۱۰^{ن-۱} = ۱ - ۱ + ۱۰ - ۱۰ + ۱۰۰ - ۱۰۰ + ۱۰۰۰ - ۱۰۰۰ + \dots$

$$= \frac{۱}{۲} (\text{سب سروں کا مجموعہ})$$

$$= \frac{۱ - ۱۰^{ن}}{۲}$$

۱۷۰۔ مسئلہ ششامی کی مدد سے ہم ایسے جملوں کو بھی پھیلا سکتے ہیں جن میں دو سے زیادہ رقمیں ہیں۔

مثال - جملہ (لا + لا - لا) کی صورت تفصیلی معلوم کرو۔
 اگر (لا - لا) کو ایک رقم مان لیا جائے تو صورت تفصیلی

$$= (لا)^2 + ۳(لا)(لا - لا) + ۳(لا - لا)^2 + (لا - لا)^3$$

 جو عمل اختصار کے بعد

$$= لا^3 + ۳لا^2 - ۳لا^2 - لا^3 + لا^3 + لا^3 - لا^3 - لا^3$$

۱-۱- ذیل کی مثالیں سبق آموز ہیں

مثال (۱) ج + ج + ج + + ج کی قیمت دریافت کرو

$$(۱ + لا) = ج + ج + ج + لا + ج + لا + ج + لا + + ج + لا$$

$$(۱ + لا) = ج + ج + ج + لا + ج + لا + ج + لا + + ج + لا$$

اس لیے ضرب دینے سے ج + ج + ج + + ج

$$= (۱ + لا)(۱ + لا) = (۱ + لا)^2$$
 کی صورت تفصیلی میں ن کا سر

اس لیے ج + ج + ج + + ج = $\frac{(۱ + لا)^2 - ۱}{۲}$

مثال (۲)

اگر (لا + لا) = ج + ج + ج + لا + ج + لا + ج + لا + + ج + لا
 تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

$$ج + ج + ج + ۲ج + ۳ج + + (۱ + لا)ج$$

$$ج + ج + ج + ۳ج + + نج$$

$$سلسلہ (۱) = (ج + ج + ج + + ج + لا)$$

$$+ (ج + ج + ج + ۲ج + ۳ج + + ج + لا)$$

$$= ۲ + ن + (۱ + لا) + \frac{(۱ + لا)(۲ + لا)}{۲ \times ۱}$$

$$= {}^n_2 + {}^n_1 (1+1) = {}^{n-1}_2 + {}^{n-1}_1 \times 2$$

سلسلہ (۲) کی قیمت معلوم کرنے کے لیے اس طرح عمل کرو۔

$$ج_1 لا + ج_2 لا + ج_3 لا + \dots + ج_n لا$$

$$= {}^n_1 لا + {}^n_2 لا + \dots + {}^n_n لا = {}^{n-1}_1 لا + {}^{n-1}_2 لا + \dots + {}^{n-1}_n لا$$

اب لا کو $\frac{1}{لا}$ میں تبدیل کرنے سے حاصل ہوگا

$$(۳) \dots \dots \dots \frac{1}{لا} + 1 = \frac{ج_1}{لا} + \frac{ج_2}{لا} + \dots + \frac{ج_n}{لا}$$

$$(۴) \dots \dots \dots {}^n_1 (1 + \frac{1}{لا}) = ج_1 لا + ج_2 لا + \dots + ج_n لا$$

اب اگر رشتوں (۳) اور (۴) میں دائیں طرف کے دونوں سلسلوں کو آپس میں اکٹھا ضرب دیں تو معلوم ہوگا کہ اس حاصل ضرب کی رستم مطلق یعنی ایسی رستم جس میں لا موجود نہ ہو دیا ہوا سلسلہ (۲) ہے۔

اس لیے سلسلہ (۲) $= \frac{ج_1}{لا} (1 + \frac{1}{لا}) = {}^{n-1}_1$ کی صورت تفصیلی کی وہ رقم جس میں لا شامل نہ ہو۔

$$= \frac{ج_2}{لا} (1 + \frac{1}{لا}) = {}^{n-2}_1$$

نہ ہو۔

$$= {}^{n-2}_2$$

$$= {}^{n-2}_3$$

$$= \frac{{}^{n-2}_2}{{}^{n-2}_1}$$

“ “ “ ” +

ذیل کی ہر ایک تفصیلی صورت میں دریافت کرو کہ سب سے بڑی رقم

کوئی ہے۔

۱۰۔ $(۲۳ - لا)$ جب کہ $لا = ۹$ اور $ما = ۴$

۱۱۔ $(۲ + ب)$ جب کہ $ب = ۴$ اور $ب = ۵$

۱۲۔ $(۲ + لا)$ جب کہ $لا = \frac{۵}{۴}$

ذیل کی تفصیلی صورتوں میں سب سے بڑی رقم کی قیمت دریافت کرو۔

۱۳۔ $(۱ + لا)$ جب کہ $لا = \frac{۲}{۳}$ اور $ن = ۶$

۱۴۔ $(۱ + لا)$ جب کہ $ب = \frac{۱}{۴}$ ، $لا = \frac{۱}{۳}$ اور $ن = ۹$

۱۵۔ ثابت کرو کہ $(۱ + لا)^ن$ کی درمیانی رقم کا سر $(۱ + لا)^{ن-۱}$ کی دو

درمیانی رقموں کے سروں کے مجموعے کے برابر ہے۔

۱۶۔ اگر $(۱ + لا)^ن$ کی صورت تفصیلی میں طاق رقموں کا مجموعہ $م$ ہو اور جفت رقموں کا مجموعہ $م'$ تو ثابت کرو کہ

$$م - م' = (۱ - لا)^ن$$

۱۷۔ $(۱ + لا)^ن$ کی صورت تفصیلی میں دوسری، تیسری، چوتھی،
رقمیں بالترتیب ۲۴، ۲۲ اور ۱۰۸ ہیں لا، ما، ن کی قیمتیں دریافت کرو۔

۱۸۔ $(۱ + لا - لا^۲)$ کی صورت تفصیلی دریافت کرو۔

۱۹۔ $(۳ - لا - لا^۲ + لا^۳)$ کی صورت تفصیلی دریافت کرو۔

۲۰۔ $(۱ + لا)^ن$ کی صورت تفصیلی میں اخیر سے روٹی رقم دریافت کرو۔

۲۱۔ $(لا - \frac{۱}{لا})^{ن+۱}$ کی صورت تفصیلی میں اخیر سے $(ع + ۲)$ ویں رقم
دریافت کرو۔

۲۲۔ $(۱ + لا)^۳$ کی صورت تفصیلی میں $(۲ + ر)$ ویں اور $(۲ + ر)$ ویں
رقموں کے سر برابر ہیں، ر کی قیمت دریافت کرو۔

۲۳۔ $(۱ + لا)^ن$ کی صورت تفصیلی میں ۳ روں اور $(۲ + ر)$ ویں

رقموں کے سر برابر ہیں، ر اور ن کا باہمی ربط دریافت کرو۔

$$\frac{n^2}{n^2 - 1} =$$

$$۳۴ - \text{ج.} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1} =$$

$$۳۵ - \text{ج.} - \text{ج.} - \text{ج.} - \text{ج.} - \dots - \text{ج.} \text{ میں سے دو دو کے}$$

$$\text{حاصل ضربوں کا مجموعہ} = \frac{n^2}{n^2 - 1} - \frac{1}{n+1}$$

$$۳۶ - \text{سلسلہ} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-1} \text{ کو جمع کرو۔}$$

$$۳۷ - 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n+1} \text{ کو مختصر کرو۔}$$



باب چہارم

لامتناہی سلسلوں کا استدقاق مسئلہ ثنائی کسی قوت نما کے لیے
۱۷۳۔ انتہا۔

تعریف۔ فرض کرو کہ n کی ہر مثبت صحیح قیمت کے جواب میں تفاعل $f(n)$ کی ایک معین قیمت ہے۔ جیسے جیسے n بڑھتا ہے، اگر $f(n)$ ایک محدود مقدار L کے بے انتہا قریب آجاتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ تفاعل $f(n)$ کی انتہا جبکہ n مائل بہ لامتناہی ہے L کے برابر ہے۔

انتہا کی باضابطہ تعریف یہ ہے:۔

کسی اختیاری مثبت مقدار ϵ (جو جتنی چھوٹی چاہیں لی جاسکتی ہے) کے جواب میں اگر ایک مثبت صحیح عدد N ایسا دریافت کیا جاسکتا ہے کہ n کی ان تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لیے جو N سے بڑی ہیں $f(n)$ L کی عددی قیمت ϵ سے چھوٹی ہو تو ہم کہتے ہیں کہ $f(n)$ کی انتہا جبکہ n مائل بہ لامتناہی ہے L کے برابر ہے اور لکھتے ہیں۔

مثلاً $f(n) = \frac{1}{n}$

مثال (۱)۔ اگر $f(n) = 1 + \frac{1}{n}$

تو $f(n) = 1$

مثال (۲)۔ اگر $f(n) = \frac{n+1}{n^2+3}$ تو $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ مجموعہ کر۔

$$f(n) = \frac{n+1}{n^2+3} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2+3}$$

جب n لا متناہی کی طرف مائل ہوتا ہے تو اس کسر کا شمار کنندہ صفر کی طرف مائل ہوتا ہے اور نسب نما اکائی کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اس لیے $f(n)$ کی انتہا جبکہ n لا متناہی کی طرف مائل ہوتا ہے صفر یعنی صفر ہے۔

مثال (۳)۔ اگر $f(n) = (1 - \frac{1}{n})^n$

تو $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ وجود نہیں رکھتی کیونکہ $f(n) = 1 - \frac{1}{n}$ بموجب اس کے کہ n جفت ہے یا طاق۔

مثال (۴)۔ اگر $f(n) = n^n$ تو $f(n)$ کی قیمت بے انتہا بڑھ جاتی ہے جبکہ n مائل بہ لا متناہی ہوتا ہے۔ اس صورت میں $f(n)$ کسی محدود انتہا کی طرف مائل نہیں ہوتا۔

۱۷۴۔ لا متناہی سلسلے۔

فرض کرو کہ n کی ہر مثبت صحیح قیمت کے لیے تفاعل u_n کی ایک معین قیمت ہے۔

کی شکل کے جملے کو جس کی ہر رقم کے بعد اور ایک رقم ہے لا متناہی سلسلہ کہتے ہیں۔ اس سلسلہ کی پہلی n رقموں کے مجموعہ کو علامت S_n سے تعبیر کرتے ہیں۔

اگر S_n ایک محدود انتہا S کی طرف مائل ہوتا ہے جبکہ

ن لا متناہی کی طرف مائل ہوتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ دیا ہوا لا متناہی سلسلہ مستدق ہے اور ص کو لا متناہی سلسلہ کا مجموعہ کہتے ہیں۔ پس ص کی تعریف ذیل کی مساوات سے ہوتی ہے۔

$$ن = ص$$

اس کو یوں بھی لکھتے ہیں۔

$$ص = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots + ن + \dots + \infty$$

$$یا چھ $\infty = ص$$$

اگر ص کسی محدود انتہا کی طرف مائل نہ ہو جبکہ ن لا متناہی کی طرف مائل ہوتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ دیا ہوا لا متناہی سلسلہ غیر مستدق ہے۔

مثال (۱) لا متناہی ہندسی سلسلہ

$$۱ + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۴} + \frac{1}{۸} + \dots$$

مستدق ہے اور اس کا مجموعہ = ۲

مثال (۲)۔ اگر لا بلحاظ عددی قیمت کے اکائی سے چھوٹا ہو تو لا متناہی

$$ہندسی سلسلہ ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱ + \dots$$

مستدق ہے اور اس کا مجموعہ = $\frac{۱}{۱-۱}$ (دفعہ ۵)

مثال (۳)۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\infty + \frac{1}{۲ \times ۳} + \frac{1}{۳ \times ۴} + \frac{1}{۴ \times ۵} + \dots$$

مستدق ہے اور اس کا مجموعہ دریافت کرو۔

اس صورت میں

$$\frac{1}{۲} - \frac{1}{۳} = \frac{1}{۲ \times ۳} = ۱$$

$$\frac{1}{۳} - \frac{1}{۴} = \frac{1}{۳ \times ۴} = ۲$$

$$\frac{1}{۴} - \frac{1}{۵} = \frac{1}{۴ \times ۵} = ۳$$

∴ $\frac{1}{1+n} - 1 = \frac{1}{n+1} - 1 = \frac{1 - (n+1)}{n+1} = \frac{-n}{n+1} = -\frac{n}{n+1}$

مثال (۴) اگر سلسله $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ تا ∞

کی پہلی ن رمتوں کا مجموعہ ص ن ہو تو
 ص ن = ایسا صفر بموجب اس کے کہ ن طاق ہے یا جفت۔
 اس لیے ص ن کسی انتہا کی طرف مائل نہیں ہوتا۔ یعنی دیا ہوا لامتناہی سلسلہ
 غیر مستندق ہے۔

۱۷۵۔ لامتناہی سلسلوں کے استدقاق کے عام مسئلے۔

(۱) اگر m ایک دیا ہوا مثبت صحیح عدد ہو تو سلسلے

$$\infty^{\frac{1}{2}} + \dots + n^{\frac{1}{2}} + \dots + 2^{\frac{1}{2}} + 1^{\frac{1}{2}} + \dots$$

اور ∞ + $\infty + 1$ + $\infty + 2$ + $\infty + 3$ + تا ∞

دونوں مستحق ہونگے یا دونوں غیر مستحق ہونگے۔

فرض کرو کہ $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

اور $1 + m^e + \dots + r + m^e + 1 + m^e = S_n$

$$\therefore \text{سنان} = \text{صم} + \text{ن} - \text{صم}$$

چونکہ ص م مستقل ہے، اس لیے حاصل ہوتا ہے کہ
اگر ص م + ن ایک محدود انتہائی طرف مائل ہو تو سان بھی ایک
محدود انتہائی طرف مائل ہوگا۔

اگر ص م ہن کسی محدود انتہا کی طرف مائل نہ ہو تو س ن بھی کسی محدود انتہا کی طرف مائل نہیں ہوگا۔

(۲) اگر سلسلہ $۱ع + ۲ع + \dots + ۶ع + \dots + ۱۰۰ع$

مستند ہو اور اس کا مجموعہ ص ہو تو

سلسلہ ج $۱ج + ۲ج + ۳ج + \dots + ۶ج + \dots + ۱۰۰ج$

بھی مستند ہوگا اور اس کا مجموعہ ج ہوگا

کیونکہ اگر $ن = ص$

تو یہ حاصل ہوتا ہے کہ $ن = ج$

(۳) اگر لاتناہی سلسلہ $۱ع + ۲ع + ۳ع + \dots + ۶ع + \dots$

مستند ہو تو $ن = ۰$

چونکہ $ن = ص - ۱$

$\therefore ن = ۰ = (ص - ۱) - ۱$

$= ن - ص = ۰$

$ص = ۰$

اس مسئلہ کا عکس درست نہیں ہے، یعنی اگر $ن = ۰$

تو ضروری نہیں ہے کہ دیا ہوا سلسلہ مستند ہو۔

مثال - سلسلہ $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \dots + \frac{۱}{۱۰۰} + \dots$

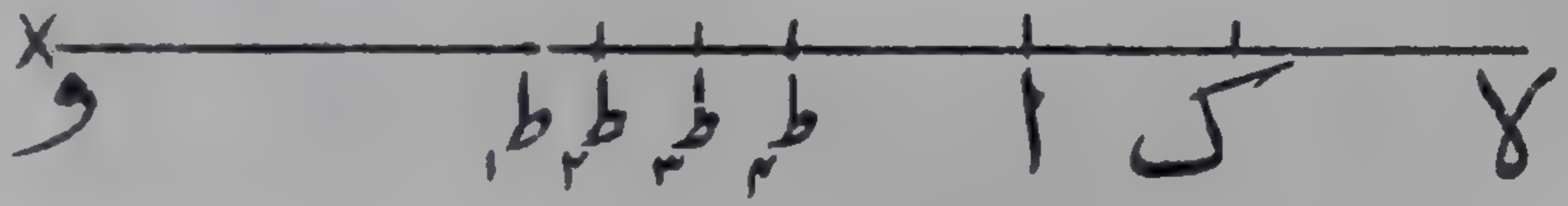
غیر مستند ہے اگرچہ $ن = ۰$

(۴) اگر ایک لاتناہی سلسلہ کی تمام رقیس مثبت ہوں

اور اگر ص ن ہمیشہ چھوٹا ہو ایک محدود عدد ک سے تو دیا ہوا سلسلہ مستدق ہوگا اور اس کا مجموعہ ک سے بڑا نہیں ہوگا۔

اس مسئلہ کا باضابطہ ثبوت مشکل ہے۔ لیکن مبتدی کے لیے ذیل کا استدلال کافی ثابت ہوگا۔

چونکہ سلسلہ کی تمام رقمیں مثبت ہیں، اس لیے جیسے جیسے ن بڑھتا ہے ص ن بھی بڑھتا ہے۔ نیز ص ن ہمیشہ چھوٹا ہے ک سے۔ ایک خط مستقیم ولا پر نقاط ط، ط، ط، ک کے ذریعے اعداد ص، ص، ص، ک کو تعبیر کرو۔



ن کی قیمتوں ۱، ۲، ۳، کے جواب میں نقطہ ط ن بالترتیب مقامات ط، ط، ط، پر واقع ہوتا ہے اور جیسے جیسے ن بڑھتا ہے، ط ن بائیں جانب سے دائیں جانب کو ہٹتا ہے۔

چونکہ ط ن کبھی بھی ک کی دائیں جانب نہیں آسکتا اس لیے ایک ایسا نقطہ ۱ وجود رکھتا ہے (جو ک کی بائیں جانب ہے یا ک پر منطبق ہے) کہ ن کی کافی بڑی قیمتوں کے لیے ط ۱ کا طول جتنا چھوٹا چاہیں بنایا جاسکتا ہے۔ اگر نقطہ ۱ سے تعبیر ہونے والا عدد ۱ ہو تو

$$\text{نہیں} \quad \text{ص} = ۱$$

یعنی دیا ہوا سلسلہ مستدق ہے اور اس کا مجموعہ ۱ ہے۔
۱۷۶۔ عملی ضروریات کے لیے غیر مستدق سلسلے بہت کم استعمال میں آتے ہیں۔ اس لیے ضروری ہے کہ ایسے سادہ طریقے معلوم

کیے جائیں جن کی مدد سے ہم یہ جانچ سکیں کہ ایک دیا ہوا لا متناہی سلسلہ مستحق ہے یا نہیں۔ دفعات ۱۷۷ تا ۱۸۱ کے طریقے چند مشہور سلسلوں کے استدقاق کی جانچ کے لیے کافی ثابت ہونگے۔

۱۷۷۔ اگر سلسلہ $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots$ کی تمام قیمتیں مثبت

ہوں اور (۱) اگر n کی تمام قیمتوں کے لیے $\frac{1}{n} > k$

یا (۲) اگر نہا $\frac{1}{n} > 1$ تو دیا ہوا سلسلہ مستحق ہوگا۔

(۱) بموجب فرض

$$\frac{1}{1} > k, \frac{1}{2} > k, \frac{1}{3} > k, \frac{1}{4} > k, \dots$$

$$\frac{1}{1} > k, \frac{1}{2} > k, \frac{1}{3} > k, \frac{1}{4} > k, \dots$$

$$\frac{1}{1} > k, \frac{1}{2} > k, \frac{1}{3} > k, \frac{1}{4} > k, \dots$$

اس لیے سلسلہ $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots$ کی پہلی

ن قیمتوں کا مجموعہ ہندسی سلسلہ $۱ + k + k^2 + k^3 + \dots$ کی پہلی

ن قیمتوں کے مجموعہ سے چھوٹا ہوگا۔ چونکہ $k > 1$ اس لیے ن کی تمام

قیمتوں کے لیے ہندسی سلسلہ $۱ + k + k^2 + k^3 + \dots$

کی پہلی ن قیمتوں کا مجموعہ $\frac{1}{1-k}$ سے چھوٹا ہوگا۔ اس لیے ن کی

تمام قیمتوں کے لیے سلسلہ $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots$ کی پہلی ن

قیمتوں کا مجموعہ محدود مقدار $\frac{1}{1-k}$ سے چھوٹا ہوگا۔ پس بموجب

دفعہ ۱۷۵ (۴) دیا ہوا لا متناہی سلسلہ مستحق ہے۔

(۲) فرض کرو کہ نہا $\frac{1}{n} = l$ جہاں $l > 1$

ایک عدد k ایسا منتخب کرو کہ $k > 1$
 انتہا کی تعریف کی رو سے ایک مثبت صحیح عدد m ایسا معلوم
 کیا جاسکتا ہے کہ $\frac{1+n}{n} > k$ بشرطیکہ $n < m$ کیونکہ n کی کافی
 بڑی قیمتوں کے لیے $\frac{1+n}{n}$ اور k کا فرق k اور 1 کے فرق سے
 چھوٹا ہوتا ہے۔

پس سلسلہ $m+1 + m+2 + \dots$ مستحق ہے اور اس لیے
 سلسلہ $1 + 2 + 3 + \dots$ بھی مستحق ہے [دفعہ ۱۷۵ (۱)]
 ۱۷۵ - سلسلہ $1 + 2 + 3 + \dots$ غیر مستحق ہوگا

(۱) اگر $\frac{1+n}{n} \leq 1$ یا (۲) اگر نہ $\frac{1+n}{n} < 1$
 اس صورت میں سلسلہ کی ہر رقم بلحاظ عددی قیمت کے
 اپنی رقم یا قبل کے برابر ہے یا اس سے بڑی ہے۔ اس لیے n صفر کی
 طرف مائل نہیں ہوتا جبکہ n لاتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے۔ یعنی
 دفعہ ۱۷۵ (۳) کی شرط پوری نہیں ہوتی ہے۔ اس لیے دیا ہوا
 سلسلہ غیر مستحق ہے۔

(۲) فرض کرو کہ نہ $\frac{1+n}{n} = 1$ جہاں $l < 1$
 انتہا کی تعریف کی رو سے ایک مثبت صحیح عدد m ایسا معلوم
 کیا جاسکتا ہے کہ

$\frac{1+n}{n} < 1$ بشرطیکہ $n < m$
 پس سلسلہ $m+1 + m+2 + \dots$ غیر مستحق ہے

اس لیے دیا ہوا سلسلہ $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots$ بھی غیر مستحق ہے۔
 نوٹ:۔ (۱) یہ کافی ہے کہ دفعات ۱۷۶ اور ۱۷۷ کے شرائط
 ن کی ان تمام قیمتوں کے لیے پوری ہوں جو ایک دیے ہوئے عدد
 ع سے بڑی ہیں۔

(۲) اگر نہا $1 + \frac{ع}{ن} = ۱$ تو اس جانچ کی مدد سے سلسلہ کے
 استدقاق یا عدم استدقاق کی تحقیق نہیں ہو سکتی۔

۱۷۹۔ سلسلہ $۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + \dots$ جس میں رتھیں
 متبادلاً مثبت منفی ہیں، مستحق ہوگا۔ اگر کوئی رقم اپنی رقم یا قبل سے
 بلحاظ عددی قیمت کے بڑی نہ ہو اور نہا $ع = ۰$ ۔
 پہلی ۲۱ رقموں کے مجموعہ پر غور کرو۔

ص $۱ = (۱ - ۲) + (۳ - ۴) + \dots + (۲۱ - ۲۲)$ (۱)۔
 یہ مجموعہ ذیل کی شکل میں بھی لکھا جاسکتا ہے۔

ص $۱ = ۱ - (۲ - ۳) - (۴ - ۵) - \dots - (۲۱ - ۲۲)$ (۲)۔
 چونکہ $۱ \leq ۲ \leq ۳ \leq ۴ \leq ۵ \leq \dots$

اس لیے قوسوں کے اندر کی مقداریں منفی نہیں ہیں۔

رشتہ (۱) سے معلوم ہوتا ہے کہ ص مثبت ہے اور اس کی

قیمت ن کے ساتھ ساتھ بڑھتی ہے۔ رشتہ (۲) سے معلوم ہوتا ہے کہ
 ص ہمیشہ چھوٹا ہے ۱ سے۔

پس دفعہ ۱۷۵، (۲) کی رو سے ص ایک انتہا ص کی طرف
 جو مثبت ہے اور ۱ سے چھوٹی ہے، مائل ہوتا ہے

نیز ص $1 + \frac{ع}{ن} = ص + \frac{ع}{ن} = ۱$ اور نہا $ع = ۰$

اس لیے ص $1+n$ بھی اسی انتہا ص کی طرف مائل ہوتا ہے۔

پس ثابت ہوا کہ دیا ہوا سلسلہ مستحق ہے اور اس کا مجموعہ مثبت ہے اور n سے چھوٹا ہے۔

۱۸۰۔ فرض کرو کہ ایک دیے ہوئے لا متناہی سلسلہ ص میں مثبت اور منفی دونوں قسم کی رقمیں ہیں۔ فرض کرو کہ اس سلسلہ ص کی تمام منفی رقموں کی علامت بدلنے سے سلسلہ ص حاصل ہوتا ہے۔ اگر سلسلہ ص مستحق ہو تو سلسلہ ص بھی مستحق ہوگا۔ اس سلسلہ کا باضابطہ ثبوت مشکل ہے۔ فی الحال طالب علم اس مسئلہ کو بغیر ثبوت کے مان لے۔

مثال۔ سلسلہ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$ مستحق ہے کیونکہ

سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ مستحق ہے۔

۱۸۱۔ دفعات ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ کی مدد سے معلوم ہوتا ہے کہ لا متناہی سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ (جس کی رقمیں مثبت اور منفی دونوں قسم کی ہیں) مستحق ہے (۱) اگر ن کی ان تمام قیمتوں کے لیے جو ایک دیے ہوئے عدوم سے بڑی ہیں $|\frac{1}{2^n}| > k$ ،

یا (۲) اگر نہا $|\frac{1}{2^n}| = L > 1$

اور دیا ہوا سلسلہ غیر مستحق ہوگا (۱) اگر ن کی ان تمام قیمتوں کے لیے جو ایک دیے ہوئے عدوم سے بڑی ہیں $|\frac{1}{2^n}| \leq k$

یا (۲) اگر نہا $|\frac{1}{2^n}| = L < 1$

قوت نما کی کسی منطق قیمت کے لیے مسئلہ شنائی کا ثبوت

۱۸۲۔ کھلے باب میں ہم نے مسئلہ شنائی کی اس صورت پر غور کیا ہے جس میں قوت نما مثبت صحیح عدد تھا۔ اب ہم اس کی تحقیق کرینگے کہ آیا کھلے باب کے ضابطے قوت نما کی کسی منطق قیمت کے لیے بھی درست ہیں یا نہیں۔

چونکہ دفعہ ۱۶۷ کی رو سے ہر شنائی جملہ کو معیاری شکل میں لایا جاسکتا ہے، اس لیے صرف $(1 + \lambda)$ کی شکل کے جملہ پر غور کرنا کافی ہوگا۔ جذر نکالنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\dots\dots\dots (1 + \lambda)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{8}\lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda^3 - \dots\dots\dots$$

اور عمل تقسیم سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\dots\dots\dots (1 - \lambda)^{-2} = \frac{1}{(1 - \lambda)^2} = 1 + 2\lambda + 3\lambda^2 + 4\lambda^3 + \dots\dots\dots$$

اور ان سلسلوں میں سے ہر ایک میں رقموں کی تعداد لا محدود ہے۔ ان صورتوں میں ہم نے علیحدہ علیحدہ طریقوں سے جملوں $(1 + \lambda)^{\frac{1}{2}}$ اور $(1 - \lambda)^{-2}$ کے پھیلاؤ حاصل کئے ہیں۔ ابھی ہم یہ ثابت کرینگے کہ مندرجہ بالا نتائج جملہ $(1 + \lambda)^n$ کے پھیلاؤ کی خاص صورتیں ہیں جبکہ ان کوئی منطق مقدار ہو۔

۱۸۳۔ اگر م کوئی منطق عدد ہو تو لا متناہی سلسلہ

$$\dots\dots\dots 1 + m\lambda + \frac{m(m-1)}{2}\lambda^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3}\lambda^3 + \dots\dots\dots$$

کے استدقاق پر بحث کرو۔ یہ فرض کیا گیا ہے کہ م مثبت صحیح عدد نہیں ہے۔ اگر اس سلسلہ کی ر میں رقم کو ع سے تعبیر کریں تو

$$\frac{1 + m}{ع} = \frac{1 + r - m}{r} \times \lambda = (1 - \frac{1 + m}{r}) \lambda$$

$$\therefore \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

دفعہ ۱۸ کی رو سے دیا ہوا سلسلہ مستحق ہوگا اگر $|a| > 1$ اور غیر مستحق ہوگا اگر $|a| < 1$

نوٹ:۔ اس سلسلہ کو ثنائی سلسلہ کہتے ہیں۔ اگر م صحیح مثبت عدد ہو تو $(m+1)$ ویں رقم کے بعد اس سلسلہ کی تمام رقمیں صفر ہو جاتی ہیں اور دیا ہوا سلسلہ تنناہی سلسلہ بن جاتا ہے اور پہلی $m+1$ رقموں کو جمع کرنے سے اس کا مجموعہ حاصل ہوتا ہے۔

اگر م منفی یا کمزور ہو تو ایک لاتناہی سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

۱۸۴۔ اگر $|a| > 1$ اور م کوئی منطوق عدد ہو تو مستحق سلسلہ

$$1 + m + \frac{(1-m)}{2} + \frac{m(1-m)(2-m)}{3} + \frac{m^2(1-m)(2-m)(3-m)}{4} + \dots$$

کو ف (م) سے تعبیر کرو۔

$$\text{پس ف (م)} = 1 + m + \frac{(1-m)}{2} + \frac{m(1-m)(2-m)}{3} + \frac{m^2(1-m)(2-m)(3-m)}{4} + \dots (1)$$

$$\text{اور ف (ن)} = 1 + n + \frac{(1-n)}{2} + \frac{n(1-n)(2-n)}{3} + \frac{n^2(1-n)(2-n)(3-n)}{4} + \dots (2)$$

ان دو سلسلوں کا حاصل ضرب لاکھ بڑھتی ہوئی قوتوں کا ایک سلسلہ ہوگا۔ اس سلسلہ کو

$$1 + a + b + c + \dots$$

سے تعبیر کرو۔

یہ ظاہر ہے کہ 'ا'، 'ب'، 'ج'..... م اور ن کے تفاعل

ہیں۔ اس لیے کسی خاص صورت میں 'ا'، 'ب'، 'ج'.....

کی قیمتیں م اور ن کی قیمتوں پر منحصر ہونگی۔ لیکن 'ا'، 'ب'، 'ج' کو

حاصل کرنے کے لیے سلسلوں (۱) اور (۲) میں لاکھ قوتوں کے سر

جس طریقہ سے ملائے جاتے ہیں وہ طریقہ م اور ن کی قیمتوں پر منحصر نہیں ہے، یعنی م اور ن کی خواہ کچھ ہی قیمتیں ہوں، سروں 'ا' 'ب' 'ج' کی صورت غیر تبدیل ہوگی۔ اس لیے اگر ہم 'ا' 'ب' 'ج' کی صورت م اور ن کی کوئی خاص قیمتوں کے لیے معلوم کر سکیں تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ م اور ن کی تمام قیمتوں کے لیے 'ا' 'ب' 'ج' کی وہی غیر تبدیل صورت ہوگی۔

قوت نما کی کسی منطق قیمت کے لیے مسئلہ ثنائی کو ثابت کرنے کے لیے ہم مندرجہ بالا اصول استعمال کریں گے۔

۱۸۵۔ قوت نما کی کسی منطق قیمت کے لیے مسئلہ ثنائی کو ثابت

کرو۔ [آئیلر کا ثبوت]

دفعہ ۱۸۴ کی ترقیم کے مطابق اگر $|a| > |b|$ اور م اور ن کوئی منطق اعداد ہوں تو ف (م) اور ف (ن) کا حاصل ضرب لا کی صعودی قوتوں کا ایک سلسلہ ہوگا جس میں سروں 'ا' 'ب' 'ج' کی صورت غیر تبدیل ہوگی۔

اس حاصل ضرب کی یہ غیر تبدیل صورت معلوم کرنے کے لیے ہم م اور ن کو وہ قیمتیں دے سکتے ہیں جن سے عمل میں سہولت ہو۔

پس فرض کرو کہ م اور ن مثبت صحیح عدد ہیں اس صورت میں

ف (م) صورت تفصیلی ہے $(1 + a)$ کی اور ف (ن) صورت تفصیلی ہے $(1 + a)$ کی اس لیے

$$ف (م) \times ف (ن) = (1 + a)^m \times (1 + a)^n = (1 + a)^{m+n}$$

لیکن اگر م اور ن مثبت صحیح عدد ہوں تو $(1 + a)^{m+n}$ کی صورت تفصیلی ہے۔

$$1 + (1 + a) + \frac{(1 + a)^2}{2 \times 1} + \frac{(1 + a)^3}{3 \times 1} + \dots + \frac{(1 + a)^{m+n}}{(m+n) \times 1} + \dots$$

پس معلوم ہوا کہ تمام صورتوں میں حاصل ضرب $f(m) \times f(n)$ کی صورت تفصیلی (۱) ہوگی خواہ m اور n کی قیمتیں کچھ ہی ہوں اور سابق طریق کتابت کے موافق ہم اس کو $f(m+n)$ سے تعبیر کر سکتے ہیں اس لیے m اور n کی تمام منطق قیمتوں کے لیے

$$f(m) \times f(n) = f(m+n)$$

$$\text{نیز } f(m) \times f(n) \times f(e) = f(m+n+e)$$

$$= f(m+n+e)$$

اسی طرح عمل کرنے سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$f(m) \times f(n) \times f(e) \dots \dots \dots f(s) \text{ اجزائے ضربی تک} \\ = f(m+n+e+\dots \dots \dots s) \text{ (س رمتوں تک)}$$

فرض کرو کہ ان میں سے ہر ایک مقدار $\frac{1}{s}$ کے برابر ہے جہاں r اور s دونوں مثبت صحیح عدد ہیں۔

$$\therefore f\left(\frac{1}{s}\right) = f(r)$$

لیکن چونکہ r مثبت صحیح عدد ہے اس لیے $f(r) = (r+1)$

$$\therefore (r+1) = f\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\therefore (r+1) \frac{1}{s} = f\left(\frac{1}{s}\right)$$

لیکن $f\left(\frac{1}{s}\right)$ سلسلہ ذیل کو تعبیر کرتا ہے۔

$$1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \dots \dots \dots + \frac{1}{s^{r-1}}$$

$$\therefore (r+1) \frac{1}{s} = 1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \dots \dots \dots + \frac{1}{s^{r-1}}$$

جس سے مسئلہ ثنائی ثابت ہوتا ہے جبکہ قوت نما ایک مثبت کسر ہو۔

اب ہم مسئلہ ثنائی کا ثبوت منفی قوت نما کے لیے دیں گے۔
یہ ثابت ہو چکا ہے کہ m اور n کی تمام منطق قیمتوں کے لیے
 $f(m) \times f(n) = f(m+n)$
اس میں m کی بجائے $(-n)$ رکھو (جہاں n مثبت مقدار ہے)
حاصل ہوگا

$f(-n) \times f(n) = f(-n+n) = f(0) = 1$
کیونکہ سوائے پہلی رقم کے دوسری تمام رقمیں نابود ہوتی ہیں۔

$$f(-n) = \frac{1}{f(n)}$$

لیکن n کی کسی مثبت قیمت کے لیے $f(n) = (1+n)$

$$f(-n) = \frac{1}{(1+n)}$$

$$\text{یا } (1+n)^{-n} = f(-n)$$

لیکن $f(-n) \equiv 1 + (-n) + \frac{(-n)(-n-1)}{2 \times 1} + \dots$

اس لیے $(1+n)^{-n} = 1 + (-n) + \frac{(-n)(-n-1)}{2 \times 1} + \dots$

جس سے مسئلہ ثنائی منفی قوت نما کے لیے بھی ثابت ہوا۔
پس یہ مسئلہ بالعموم قوت نما کی تمام منطق قیمتوں کے لیے
ثابت ہوا۔

۱۸۶۔ مسئلہ ثنائی کا ثبوت جو دفعہ گزشتہ میں دیا گیا ہے وہ
پورا تشفی بخش نہیں اس میں غالباً طالب علم کو متعدد مشکلات پیش آئیں گی۔
اس جگہ ہم فقط ایک بات کا ذکر کیے دیتے ہیں کہ جملہ $f(m)$
میں اگر m مثبت صحیح عدد ہو تو تعداد ارقام محدود ہوتی ہے
ورنہ باقی سب حالتوں میں غیر محدود اس لیے یہ تحقیق کرنا

ضروری ہے کہ مساوات متشابهہ $F(m) \times F(n) = F(m+n)$ کا پورا پورا مفہوم کیا ہے اس کے صحیح ہونے کے لیے کن کن شرائط اور قیود کا خاص طور پر خیال رکھنا چاہیے۔

ہم ثابت کر چکے ہیں کہ اگر $|a| > 1$ تو $F(m) \times F(n) = F(m+n)$ کا $F(m+n)$ تینوں سلسلے مستحق ہیں اور اس صورت میں $F(m+n)$ حاصل ضرب $F(m) \times F(n)$ کا حسابی قائم مقام ہوگا لیکن جب $|a| < 1$ تو مذکورہ بالا سب سلسلے غیر مستحق ہوں گے اور ان کے متعلق اس صورت میں ہم صرف یہی بیان کر سکتے ہیں کہ اگر ہم سلسلہ $F(m)$ کو سلسلہ $F(n)$ سے ضرب دیں تو حاصل ضرب کی پہلی رقمیں جملہ $F(m+n)$ کی پہلی رقموں کے برابر ہونگی۔ خواہ a کی کوئی محدود قیمت ہو۔

مثال (۱)۔ $(1-a)^{-\frac{3}{2}}$ کو چار رقموں تک پھیلاؤ

$$(1-a)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}a + \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \frac{a^2}{2!} + \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \frac{a^3}{3!} + \dots$$

$$+ \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \frac{a^4}{4!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{3}{2}a + \frac{9}{8}a^2 + \frac{27}{16}a^3 + \dots$$

مثال (۲)۔ جملہ $(2+3a)^{-\frac{3}{2}}$ کو چار رقموں تک پھیلاؤ

$$(2+3a)^{-\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{3a}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \frac{a^2}{2!} + \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \frac{a^3}{3!} + \dots \right\}$$

$$+ \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \frac{a^4}{4!} + \dots$$

$$= \frac{1}{14} (1 - \frac{9}{2}a + \frac{27}{2}a^2 - \frac{27}{8}a^3 + \dots)$$

مثال (۳) - جملہ $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{3}$ کو چار رقموں تک پھیلاؤ -

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

$$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{6}$$

$$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{6}$$

$$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{6}$$

۱۸۷ - رقم عامہ دریافت کرنے کے لیے اب ہمیں ضابطہ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \text{ استعمال کرنا چاہیے}$$

کیونکہ علامت ج اس صورت میں بالکل بے معنی ہے جبکہ n مثبت صحیح عدد نہیں ہے۔
نیز رقم عامہ کا سر کبھی معدوم نہیں ہو سکتا جب تک کہ شمار کنندہ کے
اجزائے ضربی میں سے کوئی ایک صفر کے برابر نہ ہو اس لیے سلسلہ r ویں
رقم پر ختم ہوگا اگر $n - r + 1 = 0$ ۔

یعنی جب $r = n + 1$ ، لیکن چونکہ r ایک مثبت عدد ہے اس لیے یہ
مساوات ناممکن ہوگی سوائے اس صورت کے جبکہ قوت n مثبت
صحیح عدد ہو، پس معلوم ہوا کہ مسئلہ شنائی کی صورت تفصیلی میں
($n + 1$) ارقام ہونگی اگر n مثبت صحیح عدد ہو لیکن باقی سب
صورتوں میں رقموں کی تعداد لائنہا بڑی ہوگی۔

مثال (۱) - ($1 + \frac{1}{2}$) کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو

$$(1+r) \text{ ویں رقم} = \frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r}) (1 - \frac{1}{r^2}) \dots (1 - \frac{1}{r^n})$$

$$= \frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r}) (1 - \frac{1}{r^2}) \dots (1 - \frac{1}{r^n})$$

شمار کنندہ میں اجزائے ضربی کی تعداد r ہے اور ان میں سے $r-1$ منفی ہیں۔ اس لیے اگر $r=1$ کو ہر ایک جزو ضربی سے لے کر علیحدہ اکھٹا کیا جائے تو جملہ مندرجہ بالا اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1 - \frac{1}{r}) \frac{1}{r} \dots \frac{1}{r^n} \dots \frac{1}{r^n} \dots \frac{1}{r^n} \dots \frac{1}{r^n}$$

مثال (۲)۔ (۱- $\frac{1}{r}$) کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو۔

$$(1+r) \text{ ویں رقم} = \frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r}) (1 - \frac{1}{r^2}) \dots (1 - \frac{1}{r^n})$$

$$= \frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r}) (1 - \frac{1}{r^2}) \dots (1 - \frac{1}{r^n})$$

$$= \frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r}) (1 - \frac{1}{r^2}) \dots (1 - \frac{1}{r^n})$$

$$= \frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r}) (1 - \frac{1}{r^2}) \dots (1 - \frac{1}{r^n})$$

$$= \frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r}) (1 - \frac{1}{r^2}) \dots (1 - \frac{1}{r^n})$$

کیونکہ $(1 - \frac{1}{r}) = \frac{r-1}{r}$ $(1 - \frac{1}{r^2}) = \frac{r^2-1}{r^2}$ $(1 - \frac{1}{r^n}) = \frac{r^n-1}{r^n}$

مثال (۳)۔ (۱- $\frac{1}{r}$) کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو۔

$$(1+r) \text{ ویں رقم} = \frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r}) (1 - \frac{1}{r^2}) \dots (1 - \frac{1}{r^n})$$

$$= \frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r}) (1 - \frac{1}{r^2}) \dots (1 - \frac{1}{r^n})$$

$$= \frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r}) (1 - \frac{1}{r^2}) \dots (1 - \frac{1}{r^n})$$

$$= \frac{(1+r)(2+r)}{2 \times 1} [\text{شمار کنندہ اور نسب نما سے}]$$

متماثل اجزائے ضربی کو دور کرنے سے

مثال (۴)۔ ثابت کرو کہ $(1+r)^n$ کی صورت تفصیلی میں $\frac{1}{r}$

$$\text{کاسر} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{r} \times \frac{1}{r} \times \dots \times \frac{1}{r} \times (1-r)^{n-1} \times (1-r)^n$$

چونکہ $(1+r)$ ویں رقم میں $\frac{1}{r}$ واقع ہوتا ہے

$$\text{اس لیے سر مطلوب} = \frac{\frac{1}{r} \times (1-r)^n}{(1-r)^n} = \frac{1}{r}$$

$$= \frac{(1-r)^n \times (1-r)^{n-1} \times \dots \times (1-r)^2 \times (1-r)}{(1-r)^n} = \frac{1}{r}$$

$$= (1-r)^{n-1} \times \frac{1}{r} \times (1-r)^n = \frac{1}{r} (1-r)^{n-1}$$

(یہ شمار کنندہ کے اجزائے ضربی میں سے صرف ۲ مثبت ہیں اور باقی سب

منفی)

$$= \frac{1}{r} \times \frac{1}{r} \times \frac{1}{r} \times \dots \times \frac{1}{r} \times (1-r)^{n-1} \times (1-r)^n$$

امثلہ نمبری ۱۲ ب

ذیل کے جملوں کو چار رقموں تک پھیلاؤ:

۱ - $(1+r)^1$	۲ - $(1+r)^2$	۳ - $(1+r)^3$
۴ - $(1+r)^4$	۵ - $(1+r)^5$	۶ - $(1+r)^6$
۷ - $(1+r)^7$	۸ - $(1+r)^8$	۹ - $(1+r)^9$

$$\begin{aligned} 10 - (1 + \frac{1}{4})^{-4} & \quad 11 - (2 + \frac{1}{4})^{-3} & 12 - (9 + \frac{1}{4})^{-1} \\ 13 - (8 + \frac{1}{4})^{-2} & 14 - (9 + \frac{1}{4})^{-3} & 15 - (12 + \frac{1}{4})^{-1} \end{aligned}$$

لکھو اور مختصر کرو۔

$$\begin{aligned} 16 - (1 + \frac{1}{4})^{-1} & \quad \text{کی آٹھویں رقم} \\ 17 - (1 - \frac{1}{4})^{-2} & \quad \text{کی گیارھویں رقم} \\ 18 - (1 + \frac{1}{4})^{-3} & \quad \text{کی دسویں رقم} \\ 19 - (3 - \frac{1}{4})^{-1} & \quad \text{کی پانچویں رقم} \\ 20 - (1 - \frac{1}{4})^{-2} & \quad \text{کی (1 + r) ویں رقم} \\ 21 - (1 - \frac{1}{4})^{-4} & \quad \text{کی (1 + r) ویں رقم} \\ 22 - (1 + \frac{1}{4})^{-1} & \quad \text{کی (1 + r) ویں رقم} \\ 23 - (1 + \frac{1}{4})^{-11} & \quad \text{کی (1 + r) ویں رقم} \end{aligned}$$

$$24 - (2 - \frac{1}{4})^{-13} \quad \text{کی چودھویں رقم}$$

$$25 - (3 + \frac{1}{4})^{-11} \quad \text{کی ساتویں رقم}$$

$$26 - \text{ثابت کرو کہ } (1 - \frac{1}{4})^{-1} \text{ کی صورت تفصیلی میں لا کا سر } = \frac{12}{(1 - \frac{1}{4})^2}$$

$$27 - \frac{1 - \frac{1}{4}}{(1 + \frac{1}{4})^2} \text{ کی صورت تفصیلی میں لا کا سر دریافت کرو۔}$$

$$28 - \frac{3 - \frac{1}{4}}{(1 - \frac{1}{4})^3} \text{ کی } \dots \dots \dots \text{ لا}$$

$$29 - (1 + \frac{1}{4})^{-3} \text{ کی صورت تفصیلی میں پہلی منفی رقم کو منسی ہے؟}$$

$$30 - (1 - \frac{1}{4})^{-3} \text{ کی کتنی رقمیں مثبت ہیں؟}$$

$$31 - \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} \text{ کا پھیلاؤ لا کی نزولی قوتوں میں حاصل کرو۔}$$

۱۸۸۔ (۱-۷) کی صورت تفصیلی میں پہلے ن + ۱ سروں کا مجموعہ دریافت کرو۔

$$\dots + \bar{U} \frac{\partial X^r}{r \times 1} + \bar{U} \frac{r \times r}{r \times 1} + U r + 1 = r - (U - 1)$$

$$\dots + \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \times 1} +$$

$$\dots + \overset{0}{\cancel{v}} + \dots + \overset{1}{\cancel{v}} + \overset{1}{\cancel{v}} + v + 1 = (v-1)$$

اب بائیں طرف کے دونوں سلسلوں کو اکٹھا ضرب دینے سے ہم
دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کا سر

$$\hookrightarrow \frac{(r+n)(1+n)}{r \times 1} + \dots + \frac{r \times r}{r \times 1} + r + 1$$

∴ مجموعہ مطلوبہ = لائن کا سر (۱-۱۰) کی صورت تفصیلی میں

$$\frac{(3+n)(2+n)(1+n)}{(3 \times 2 \times 1)} =$$

۱۸۹۔ ظاہر ہے کہ مسئلہ شنائی کی مدد سے ہم $(لا + مان)$ کو ہمیشہ پھیلانے کے

ہیں کیونکہ یہ جملہ ذیل کی صورتوں میں سے کسی ایک میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} + 1 \right) \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} + 1 \right) \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} + 1 \right)$$

اور صورت تفصیلی حاصل کرنے کے لیے ان صورتوں میں سے ہم پہلی یا دوسری کو استعمال کریں گے بموجب اس کے کہ

$$- \frac{1}{2} | \psi \rangle \langle \psi |$$

۱۹۰۔ (۱۔ لا) کے پھیلاؤ میں رقم عامہ کی نہایت مساوی صورت
دریافت کرو۔

$$(1+r) \text{ ویں رقم} = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2) \dots (-n-r+1)}{(-n-r+1)(-n-r+2) \dots (-n-r+r)} \quad (1)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+r-1)}{(1-r)(1-r+1)(1-r+2) \dots (1-r+r-1)} \quad (2)$$

$$= \frac{n^2(n+1)(n+2) \dots (n+r-1)}{(1-r)(1-r+1)(1-r+2) \dots (1-r+r-1)} \quad (3)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+r-1)}{(1-r)(1-r+1)(1-r+2) \dots (1-r+r-1)} \quad (4)$$

اس سے ظاہر ہے کہ (۱-۱) لاج ن کی صورت تفصیلی میں ہر ایک رقم مثبت ہے۔

اگرچہ کسی جملہ ثنائی کی رقم عامہ دفعہ ۱۸۷ کے قاعدہ کی مدد سے بھی معلوم ہو سکتی ہے مگر عام استعمال میں بہتر ہوگا کہ ہمیشہ ان تمام حالتوں میں رقم عامہ کی شکل مندرجہ بالا استعمال کی جائے جب قوت نامنفی ہو اور شکل

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{(1-r)(1-r+1)(1-r+2) \dots (1-r+r-1)} \quad (5)$$

استعمال کی جائے جب قوت نامثبت ہو۔

مثال - $\frac{1}{1^3 - 1^3}$ کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو۔

$$\frac{1}{1^3 - 1^3} = \frac{1}{(1-1)(1+1)(1+1)} \quad (6)$$

$$(1+r) \text{ ویں رقم} = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)(\frac{1}{3}+2) \dots (\frac{1}{3}+r-1)}{(1-r+\frac{1}{3})(1-r+\frac{1}{3}+1) \dots (1-r+\frac{1}{3}+r-1)} \quad (7)$$

$$= \frac{1 \times 4 \times 7 \times \dots \times (2-r+3)}{3(2-r+3) \dots (2-r+3+r-1)} \quad (8)$$

$$= \frac{1 \times 4 \times 7 \times \dots \times (2-r+3)}{(2-r+3) \dots (2-r+3+r-1)} \quad (9)$$

نیز (۱- لا) = ۱ + لا + لا^۲ + لا^۳ + ... + لاⁿ + ...

$$\dots + \check{v}(1+r) + \dots + \check{v}r + \check{v}r + v_{r+1} = \check{v}(1-r)$$

[مقابلہ کرو دفعہ ۱۸۲ سے]

$$\dots + \frac{r(r+1)(1+r)}{r \times 1} + \dots + r_1 + r_2 + r_3 + \dots = r_2(1 - 1)$$

۱۹۱۔ جملہ (۱+ لا) کی صورت تفصیلی میں بڑی سے بڑی قسم دریافت کرنے کی پوری تحقیقات اس صورت میں جبکہ ن کی قیمت پر کوئی قید نہ ہو دفعہ ۱۹۳ میں کی جائیگی۔ تاہم کسی مثال حسابیہ کے حل کرنے میں طالب علم کو ترکیب دفعہ ۱۶۷ استعمال کرنے میں کوئی دقت نہ ہوگی۔

مثال - جملہ (۱+ لا) کی صورت تفصیلی میں بڑی سے بڑی

رقم دریافت کرو جبکہ لا = $\frac{2}{4}$ اور ن = ۲۰
اگر ق سے رو میں رقم تعبیر کی جائے تو

$$Q_{r+1} = \frac{n-r+1}{r} \times L \times Q_r \text{ بلحاظ عددی قیمت کے}$$

$$ق \times \frac{2}{3} \times \frac{1+19}{1} =$$

$$|q_{r+1}| < |q_r|$$

$$1 < \frac{(1+19)2}{13}$$

جب تک کہ

یعنی ۳۸ < ۴۰

اس لیے ۳۷ تک ر کی تمام قیمتوں کے لیے $Q + 1$ کے قدر لیکن اگر $R = 38$ تو $Q + 1 = Q$ اور یہی سب سے بڑی قیمتیں ہیں پس ۳۸ ویں اور ۳۹ ویں قیمتیں بلحاظ عددی قیمت کے آپس میں برابر ہیں اور باقی سب قیمتوں سے بڑی ہیں۔

تقربات

۱۹۲۔ اگر E کوئی چھوٹی کسر واجب ہو تو E^2 بمقابل E کے ایک چھوٹی کسر ہوگی۔ پس اگر E نہایت ہی قلیل ہو تو تقریبی حسابات میں E^2 بمقابل E کے یا E^3 بمقابلہ E^2 کے نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ اگر معمولی تقرب مطلوب ہو تو ہم E کی ان سب قوتوں کو خارج کر سکتے ہیں جن کا درجہ ایک سے بڑا ہے۔ اگر اس سے بہتر تقرب مطلوب ہو تو ایسی رتوں کو رکھ سکتے ہیں جن میں E^2 شامل ہو اور اس سے اعلیٰ قوتوں کو نظر انداز کر سکتے ہیں اور اسی طرح ہر حالت میں مطلوبہ درجہ صحت تک نتائج حاصل کر سکتے ہیں۔

$$(E + 1)^2 = 1 + 2E + E^2$$

∴ $(E + 1)^2$ کی تقریبی قیمت $1 + 2E$ ہے

$$(E + 1)^3 = 1 + 3E + 3E^2 + E^3$$

اس لیے $1 + 3E$ تقریبی قیمت ہے $(E + 1)^3$ کی۔ اس سے اچھا تقرب $1 + 3E + 3E^2$ ہے

اسی طرح سے $(E + 1)^n = 1 + nE + \frac{n(n-1)}{2 \times 1} E^2 + \dots$

$$= 1 + nE \quad (\text{تخمیناً}) \quad \text{جہاں } E \text{ ایک چھوٹی}$$

کسر واجب ہے۔

چونکہ بموجب فرض لا اور اس سے اعلیٰ قوتیں نظر انداز

کی جاسکتی ہیں اس لیے ہر ایک جملہ ثنائی کی صورت تفصیلی میں صرف پہلی دو رقمیں لینا کافی ہوگا۔

$$\frac{\frac{1}{2} \left(\frac{11}{2} + 1 \right) + \frac{5}{2} \left(\frac{11}{2} + 1 \right)}{\frac{3}{2} \left(\frac{11}{2} + 1 \right) + 8} =$$

$$\frac{\left(\frac{11}{2} + 1 \right) + \left(\frac{11}{2} - 1 \right)}{\left(\frac{11}{2} + 1 \right) + 8} =$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{8} \left(\frac{11}{2} + 1 \right) \left(\frac{11}{2} - 1 \right) =$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{8} \left(\frac{11}{2} - 1 \right) \left(\frac{11}{2} - 1 \right) =$$

کیا جائے جس میں لا شامل ہے۔ اگر اس رقم کو نقطہ سر انداز

مثال (۳)۔ $\frac{1}{24}$ کی قیمت اعشاریہ کے چار مقام تک دریافت کرو۔

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{2}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(2 - 1 \right) = \frac{1}{2}$$

$$\left(\dots + \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} + \frac{1}{24} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 1 \right) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\dots + \frac{1}{24} \times \frac{5}{2} + \frac{1}{54} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{2} =$$

مختلف رقموں کی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے ہمیں یوں عمل کرنا چاہیے۔

$$\begin{array}{r}
 ۱ \\
 \hline
 ۵۱۴۲۸۵۶ \dots = \frac{1}{6} \\
 \hline
 ۵۰۲۰۴۰۸ \\
 \hline
 ۵۰۰۲۹۱۵ \dots = \frac{1}{۳۶} \\
 \hline
 ۵۰۰۰۴۱۶ \\
 \hline
 ۵۰۰۰۰۵۹ \dots = \frac{1}{۵۶}
 \end{array}$$

اور ہم دیکھتے ہیں کہ رقم $\frac{5}{۲} \times \frac{1}{۶}$ ایسی کسر اعشاریہ ہے جو پانچ
صفروں سے شروع ہوتی ہے۔

$$۵۰۰۰۰۸۸ + ۵۰۰۲۹۱۵ + ۵۱۴۲۸۵۶ = \frac{1}{۳۶}$$

$= ۱۴۵۸۶$ اور یہ نتیجہ کم از کم اعشاریہ کے چار مقام تک

صحیح ہے۔ مثال ۴۔ ۱۲۶ کا جذر الکعب اعشاریہ کے پانچ مقام تک

$$\sqrt[3]{۱۲۶} = \sqrt[3]{۱ + ۱۲۵}$$

$$= \sqrt[3]{1 + \frac{1}{۳۵}}$$

$$= (1 + \frac{1}{۳۵} \times \frac{1}{۳} - \frac{1}{۳۵} \times \frac{1}{۹} + \frac{1}{۳۵} \times \frac{1}{۲۷} - \dots) \sqrt[3]{۱۲۵}$$

$$= ۵ + \frac{1}{۳۵} \times \frac{1}{۳} - \frac{1}{۳۵} \times \frac{1}{۹} + \frac{1}{۳۵} \times \frac{1}{۲۷} - \dots$$

$$= ۵ + \frac{۱۲}{۱۰۵} - \frac{۴}{۳۱۵} + \frac{۴}{۲۷۰} - \dots$$

$$= ۵ + \frac{۱۲۸}{۸۱} - \frac{۳۲}{۹} + \frac{۴}{۳} - \dots$$

$$= ۵ + ۳۳۳۳۳ \dots - ۵ + ۳۵ \dots$$

$$= ۵۶۱۳۲۹ \dots$$

امثلہ نمبری ۱۲ ج

ذیل کی تفصیلی صورتوں میں (ر + ۱) میں رقم دریافت کرو۔

- ۱- $\frac{1}{2}(لا + ۱) - ۲ - (لا - ۱) - ۳ - \frac{1}{3}(لا + ۱)$
- ۲- $\frac{2}{3}(لا + ۱) - ۵ - (لا + ۱) - ۶ - \frac{2}{3}(لا - ۱)$
- ۳- $لا + ب لا - ۸ - (لا - ۲) - ۹ - (لا - ۳) - ۱۰$
- ۱۰- $\frac{1}{لا + ۱۱} - ۱۱ - \frac{1}{(لا - ۱) - ۱۲} - ۱۲ - \frac{1}{(لا - ۱) - ۱۳}$

ذیل کے جملوں کی تفصیلی صورتوں میں بلحاظ عدوی قیمت کے بڑی سے بڑی رقم دریافت کرو۔

- ۱۳- $\frac{4}{15} - (لا + ۱) - ۱۳$ جبکہ $لا = \frac{4}{15}$
- ۱۴- $\frac{11}{3} - (لا + ۱) - ۱۴$ جبکہ $لا = \frac{2}{3}$
- ۱۵- $\frac{11}{8} - (لا - ۱) - ۱۵$ جبکہ $لا = \frac{1}{8}$
- ۱۶- $(لا + ۱۵) - ۱۶$ جبکہ $لا = ۸$ اور $۳ = ۳$
- ۱۷- $(لا - ۵) - ۱۷$ جبکہ $لا = \frac{1}{4}$
- ۱۸- $(لا + ۱۴) - ۱۸$ جبکہ $لا = ۹$ ، $۶ = ۶$ ، $۲ = ۲$ ، $۱۵ = ۱۵$

مندرجہ ذیل کی قیمتیں اشریہ کے پانچ مقام تک معلوم کرو۔

- ۱۹- $\frac{98}{100} - ۲۰ - \frac{998}{1000} - ۲۱ - \frac{1003}{10000} - ۲۲$
- ۲۲- $\frac{1}{128} - ۲۳ - \frac{1}{128} - ۲۴ - \frac{1}{128} - ۲۵$
- ۲۵- $\frac{3}{4} - (۶۳۰) - ۲۶ - ۳۱۲۸$

اگر لا آتنا چھوٹا ہو کہ اس کا مربع اور اس سے بڑی قوتیں نظر انداز
کی جاسکیں تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

$$-۲۷ \quad \frac{۲}{۳} - (۷۲ + ۱) \frac{۱}{۳} (۷۶ - ۱)$$

$$-۲۸ \quad ۱ - \left(\frac{۷}{۲} - ۳ \right) \times \sqrt{۷ - ۴}$$

$$-۲۹ \quad \frac{۲(۷۳ + ۸)}{\sqrt{۵ - ۴}(۷۳ + ۲)}$$

$$-۳۰ \quad \frac{\frac{۱}{۲}(۷۳ + ۴) \times \sqrt{۷ - \frac{۲}{۳} + ۱}}{\frac{۳}{۲}(۷ + ۴)}$$

$$-۳۱ \quad \frac{\sqrt{۷ - \frac{۵}{۴} + ۱} + \sqrt{۷ - \frac{۳}{۵} - ۱}}{\sqrt{\frac{۷}{۲} - ۱} \sqrt{۵ + ۷۲ + ۱}}$$

$$-۳۲ \quad \frac{\sqrt{۷ - ۱} \sqrt{۵ - ۷۳ + ۸}}{\frac{۱}{۲}\left(\frac{۷}{۲} + ۴\right) + \frac{۳}{۵}(۷۵ + ۱)}$$

-۳۳ - ثابت کرو کہ $\frac{۱}{۲}(۷۴ - ۱)$ کی صورت تفصیلی میں لا کاسر

$$\frac{\frac{۲۱}{۲} - \frac{۱}{۲}}{۲} = ۱۰ \quad \text{ثابت کرو کہ } (۷ + ۱)$$

$$= \left\{ ۱ - \frac{۷ - ۱}{۷ + ۱} + \frac{۷(۱ + ۷)}{۲ \times ۱} + \left(\frac{۷ - ۱}{۷ + ۱} \right)^2 \right\}$$

$$-۳۵ \quad \frac{۱}{\sqrt{۷ + ۱} \sqrt{۷ + ۱}} \quad \text{کی صورت تفصیلی میں پہلی تین رقمیں}$$

دریافت کرو۔

$$-۳۶ \quad \frac{\sqrt{۷ + ۱} + \frac{۳}{۲}(۷ + ۱)}{(۷ - ۱)} \quad \text{کی صورت تفصیلی میں پہلی تین رقمیں دریافت کرو۔}$$

۳۷ - ثابت کرو کہ (۱- لا) کی صورت تفصیلی میں ن واں سر (ن-۱) ویں سر کا دو چند ہے۔

۱۹۳ - ن کی کسی ناطق قیمت کے لیے (۱+ لا) کی صورت تفصیلی میں ملحوظ عددی قیمت کے بڑی سے بڑی رقم دریافت کرو۔ چونکہ ہمیں سب سے بڑی رقم کی عددی قیمت سے تعلق ہے اس لیے ہم لا کو ہمیشہ مثبت خیال کریں گے۔

صورت اول - فرض کرو کہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

(۱+ ر) ویں رقم ر ویں رقم کو $\frac{1+ر-ن}{ر} \times لا$ سے یعنی $(ن+۱-۱) لا$ سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے اس سے ظاہر ہے کہ رقمیں یکے بعد دیگرے بڑھتی جاتی ہیں جب تک کہ

$$\left(\frac{ن+۱-۱}{ر} لا \right) < ۱$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{(ن+۱) لا}{ر} < ۱+ لا$$

$$\text{یا} \quad \frac{(ن+۱) لا}{لا+۱} < ر$$

اب اگر $\frac{(ن+۱) لا}{لا+۱}$ صحیح عدد ہو تو اس کو ف سے تعبیر کرو؛ تب اگر $ر = ف$ تو ضارب جز و ضربی ایک کے برابر ہے اور $ف+۱$ ویں رقم مثبت ویں رقم کے برابر ہے، اور یہی رقمیں باقی سب سے بڑی ہیں۔

اگر $\frac{(ن+۱) لا}{لا+۱}$ صحیح عدد نہ ہو تو اس کے صحیح حصہ کو ق سے تعبیر کرو اس صورت میں ر کی سب سے بڑی قیمت ق ہے اور $ق+۱$ ویں رقم سب سے بڑی ہے۔

صورت دوم - فرض کرو کہ n کسر مثبت ہے۔

حسب سابق $(r + 1)$ ویں رقم r ویں رقم کو $(\frac{n+1}{r} - 1)$ لا سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

(۱) اب اگر لا ایک سے بڑا ہو تو r کو کافی طور پر بڑھانے سے مندرجہ بالا جزو وضئی $(\frac{n+1}{r} - 1)$ کے اتنا قریب لایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں، اس طرح سے کسی خاص رقم کے بعد ہر ایک رقم بلحاظ عددی قیمت کے اپنی رقم باقی کی تقریباً لگنی ہو سکتی ہے۔ پس معلوم ہوا کہ رقمیں متواتر بڑھتی جاتی ہیں اور اس صورت میں کوئی رقم ایسی نہیں ہے جو باقی سب رقموں سے بڑی ہو۔

(۲) اگر لا ایک سے کم ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ ضارب جزو وضئی مثبت رہتا ہے اور گھٹتا ہے جب تک کہ r کی قیمت $n + 1$ سے بڑی نہیں ہو جاتی اور اس مقام سے اس کی قیمت منفی ہو جاتی ہے مگر بلحاظ عددی قیمت کے ہمیشہ ایک سے کم رہتی ہے، اس سے معلوم ہوا کہ اس صورت میں بڑی سے بڑی رقم وجود رکھتی ہے۔

حسب سابق ضارب جزو وضئی ایک سے بڑا ہو گا جب تک کہ $(\frac{n+1}{r} - 1) > 1$ ۔

اگر $(\frac{n+1}{r} - 1) < 1$ صحیح عدد ہو تو اسے f سے تعبیر کرو، تب صورت اول کی طرح $(f + 1)$ ویں رقم f ویں رقم کے برابر ہے اور یہی رقمیں باقی رقموں سے بڑی ہیں۔

اگر $(\frac{n+1}{r} - 1)$ صحیح عدد نہ ہو تو فرض کرو کہ q اس کا صحیح حصہ ہے، تب ظاہر ہے کہ $(q + 1)$ ویں رقم سب سے بڑی ہے۔

صورت سوم - فرض کرو کہ n منفی ہے -

یعنی فرض کرو کہ $n = -$ م جہاں m مثبت مقدار ہے، اس صورت میں

ضارب جز و ضربی کی عددی قیمت $\frac{m + r - 1}{r}$ \times $\frac{1}{r}$ یعنی $\frac{m + r - 1}{r^2}$ لا ہوگی۔

(۱) اگر n ایک سے بڑا ہو تو صورت دوم کی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ صورت تفصیلی میں کوئی ایسی رقم نہیں ہے جو باقی سب سے بڑی ہے۔

(۲) اگر n ایک سے کم ہو تو ضارب جز و ضربی ایک سے بڑا ہوگا۔

جب تک کہ $\frac{m + r - 1}{r} < 1$

یعنی $\frac{m + r - 1}{r} < 1$

یا $\frac{m + r - 1}{r} < 1$

اگر $\frac{m + r - 1}{r} < 1$ مثبت صحیح عدد ہو تو a سے f سے تعبیر کرو، تب

$(f + 1)$ ویں رقم f ویں رقم کے برابر ہوگی اور یہی رقمیں باقی سب سے بڑی ہیں۔

اگر $\frac{m + r - 1}{r} < 1$ مثبت ہو مگر صحیح عدد نہ ہو تو فرض کرو کہ q اس کا

صحیح حصہ ہے اس صورت میں $(q + 1)$ ویں رقم سب سے بڑی ہوگی۔

اگر $\frac{m + r - 1}{r} < 1$ منفی ہو تو m ایک سے کم ہوگا اور ضارب جز و ضربی

کو بصورت $(1 - \frac{m}{r})$ لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ہمیشہ ایک سے

کم رہیگا، اس لیے ہر ایک رقم اپنی رقم قبل سے کم ہوگی۔ پس معلوم
ہو کہ اس صورت میں پہلی رقم سب سے بڑی ہے۔

۱۹۴۔ ن حروف ل، ب، ج اور ان کی مختلف
قوتوں سے جو ر ابعاد کے متجانس حاصل ضرب بن سکیں ان کی تعداد
دریافت کرو۔

عمل تقسیم سے یا مسئلہ ثنائی سے

$$\frac{1}{1-ل} = 1 + ل + ل^2 + ل^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-ب} = 1 + ب + ب^2 + ب^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-ج} = 1 + ج + ج^2 + ج^3 + \dots$$

ضرب دینے سے

$$\frac{1}{1-ل} \times \frac{1}{1-ب} \times \frac{1}{1-ج} = (1 + ل + ل^2 + ل^3 + \dots)(1 + ب + ب^2 + ب^3 + \dots)(1 + ج + ج^2 + ج^3 + \dots)$$

$$= 1 + ل + ب + ج + ل^2 + ب^2 + ج^2 + ل + ب + ج + ل^2 + ب^2 + ج^2 + ل + ب + ج + \dots$$

$$= 1 + ص + ص + ص + ل + ص + ص + ل + ص + ص + ل + ص + ص + ل + \dots$$

جہاں ص، ص، ص ایک، دو، تین، ابعاد
کے متجانس حاصل ضربوں کے مجموعے ہیں جو حروف ل، ب، ج
اور ان کی قوتوں کو لینے سے بنتے ہیں۔

ان حاصل ضربوں کی تعداد معلوم کرنے کے لیے ل، ب، ج
میں سے ہر ایک حرف کو ایک کے برابر رکھو، اس طرح کرنے سے
ص، ص، ص میں ہر ایک رقم ا کے برابر

ہو جاتی ہے اس لیے ص، ص، ص، کی جو قیمتیں اس طرح
سے حاصل ہوتی ہیں وہ ایک، دو، تین،
حاصل ضربوں کی تعداد کو ظاہر کرتی ہیں۔

$$\text{نیز } ۱ - ۱ - ۱ - ۱ \times \frac{۱}{۱ - ۱ - ۱ - ۱} \times \frac{۱}{۱ - ۱ - ۱ - ۱} \times \frac{۱}{۱ - ۱ - ۱ - ۱}$$

بن جائیگا۔ $\left(\frac{۱}{۱ - ۱ - ۱ - ۱} \right)^n$ یا $(۱ - ۱ - ۱ - ۱)^{-n}$

اس لیے ص $= (۱ - ۱ - ۱ - ۱)^{-n}$ کی صورت تفصیلی میں لا کاسر

$$= \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+r-1)}{r}$$

$$= \frac{\frac{n+r-1}{r}}{\frac{n}{r}} = \frac{n+r-1}{n}$$

۱۹۵۔ کسی جملہ کثیر الارقام کی صورت تفصیلی میں تعداد ارقام
دریافت کرو، جبکہ قوت نما مثبت صحیح عدد ہو۔

$(۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱)^n$ کی صورت تفصیلی میں ہر ایک
رقم کے ابعاد n ہیں اس لیے رقموں کی تعداد n ابعاد کے ایسے
متجانس حاصل ضربوں کی تعداد کے برابر سے جو r مقادیر
 $۱، ۱، ۱، \dots، ۱$ اور ان کی مختلف قوتوں کو اکٹھا لینے سے

ہوتے ہیں اس لیے دفعہ گزشتہ کی مدد سے تعداد مطلوبہ $\frac{n+r-1}{r}$ ہے

۱۹۶۔ نتیجہ دفعہ ۱۹۴ سے ہم n اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد
کے متعلق ایک مسئلہ مستنبط کر سکتے ہیں۔

n حروف $۱، ۲، ۳، \dots، r$ پر غور کرو۔

اگر ہم r ابعاد کے ایسے متجانس حاصل ضرب مرتب کریں جو ان حروف اور ان کی مختلف قوتوں سے بن سکتے ہیں تو ہر ایک حاصل ضرب n حروف میں سے r حروف کا ایک ایسا اجتماع ہو گا جس میں کوئی ایک حرف ایک، دو، تین، دفعہ شامل ہو سکتا ہے۔ اس لیے معلوم ہو گا کہ n اشیاء میں سے r اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد جبکہ تکرار کی اجازت ہو r ابعاد کے ایسے متجانس حاصل ضربوں کی تعداد کے برابر ہے جو n حروف اور ان کی مختلف قوتوں سے بن سکتے ہیں اور اس لیے

$$= \frac{n + r - 1}{r - 1} = n + r - 1 \text{ اشیا}$$

یعنی n اشیاء میں سے r اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد جبکہ اشیاء کی تکرار کی اجازت ہو برابر ہے $n + r - 1$ اشیاء میں سے r اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد کے جبکہ تکرار کی اجازت نہ ہو۔
۱۹۷ - ہم اس باب کو چند متفرق مثالوں کے حل سے ختم کریں گے۔

مثال ۱ - $\frac{(2 - 1)(3 - 1)}{(1 + 1)(2 + 1)}$ کی صورت تفصیلی میں لاکا سر ریافت کرو۔

صورت تفصیلی = $(1 - 1 + 2 - 1)(1 - 1 + 2 - 1 + 3 - 1)$ (فرض کرو)

اب لاکا سر $1 - 1 + 2 - 1$ ، $1 - 1 + 2 - 1 + 3 - 1$ کو بالترتیب ۱، ۲، ۳ سے ضرب دینے اور مختلف حاصل ضربوں کو جمع کرنے سے حاصل ہو گا۔
اس لیے

$$\text{مطلوب} = 1 - 1 + 2 - 1 + 3 - 1 + 4 - 1 + \dots$$

دفعہ ۱۸۷
مثال ۳

$$\text{لیکن } 1 - 1 + 2 - 1 + 3 - 1 + \dots = \frac{(1 + r)(2 + r)}{2}$$

اس لیے سر مطلوب

$$= \frac{(1-r)(1+r)(2+r)}{2} - \frac{1-r}{(1-r)^2} + \frac{r(1+r)}{2} + \frac{r^2(1-r)}{2}$$

$$= \frac{(1-r)}{2} [(1+r)(2+r) + r(1+r) + r^2(1-r)]$$

$$= \frac{(1-r)(2+r+1+r+r^2)}{2}$$

مثال ۲ - سلسلہ ذیل کی قیمت دریافت کرو۔

$$2 + \frac{5}{3 \times 2} + \frac{6 \times 5}{3 \times 3} + \frac{9 \times 6 \times 5}{3 \times 3 \times 3} + \dots$$

$$= 2 + \frac{1}{3} \times \frac{5 \times 3}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{6 \times 5 \times 3}{3} + \dots$$

$$+ \frac{1}{3} \times \frac{9 \times 6 \times 5 \times 3}{3} + \dots$$

$$= 2 + \frac{1}{3} \times \frac{5 \times 3}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{6 \times 5 \times 3}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{9 \times 6 \times 5 \times 3}{3} + \dots$$

$$= 1 + \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} + \left(\frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{2} + \left(\frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} + \dots$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

مثال ۳ - اگر ن ثابت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ $(\frac{1}{n} + 3)$

کا صحیح حصہ ایک طاق عدد ہے۔

فرض کرو کہ $(\frac{1}{n} + 3)$ کا صحیح حصہ ع سے اور مکسور حصہ ک سے

تعبیر ہوتا ہے تب

$$ع + ک = ۳ + ج \frac{۱-۵}{۲} + ۴ + ج \frac{۲-۵}{۳} + ۴ + ج \frac{۳-۵}{۴} + \dots + (۱) \frac{۲-۵}{۲}$$

اب (۳ - ۱) مثبت ہے اور ایک سے کم ہے اس لیے (۳ - ۱) $\frac{۲-۵}{۲}$ ایک کسر واجب ہے، اس کو ک سے تعبیر کرو۔

$$۲ - ک = ج \frac{۱-۵}{۲} + ۴ + ج \frac{۲-۵}{۳} + ۴ + ج \frac{۳-۵}{۴} + \dots + (۱) \frac{۲-۵}{۲}$$

(۱) اور (۲) کو جمع کرنے سے غیر ناطق رقمیں خارج ہو جائیں گی اور حاصل ہوگا۔

$$ع + ک + ک = ۲ + ج \frac{۱-۵}{۲} + ۴ + ج \frac{۲-۵}{۳} + ۴ + ج \frac{۳-۵}{۴} + \dots + (۱) \frac{۲-۵}{۲}$$

= ایک جفت عدد

مگر چونکہ ک اور ک کسور واجب ہیں اس لیے ضروری ہے کہ ان کا مجموعہ ا کے برابر ہو پس معلوم ہوا کہ ع طاق عدد ہے۔

امثلہ نمبر ۱۲

سرور یافت کرو۔

۱- $\frac{۳-۵}{۲(۱-۱)}$ کی صورت تفصیلی میں لا^۱ کا

۲- $\frac{۲+۱۲-۱}{۲(۱+۱)}$ کی صورت تفصیلی میں لا^۲ کا

۳- $\frac{۳-۲}{۲(۱+۱)}$ کی صورت تفصیلی میں لا^۳ کا

۴- $\frac{۲+۱+۱}{۳(۱+۱)}$ کی صورت تفصیلی میں لا^۴ کا

۵ - ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{3!} = \dots - \frac{1}{4!} \times \frac{4 \times 5 \times 3 \times 1}{8 \times 4 \times 2 \times 2} + \frac{1}{5!} \times \frac{5 \times 3 \times 1}{4 \times 2 \times 2} - \frac{1}{6!} \times \frac{3 \times 1}{2 \times 2} + \frac{1}{4!} \times \frac{1}{2} - 1$$

۶ - ثابت کرو کہ

$$\dots + \frac{4 \times 5 \times 3}{12 \times 8 \times 4} + \frac{5 \times 3}{8 \times 4} + \frac{3}{4} + 1 = 8$$

۷ - ثابت کرو کہ

$$\dots + \frac{(4+2n)(2+n)n}{4 \times 4 \times 2} + \frac{(2+n)n}{4 \times 2} + \frac{n}{2} + 1$$

$$\{ \dots + \frac{(2+n)(1+n)n}{4 \times 4 \times 2} + \frac{(1+n)n}{4 \times 2} + \frac{n}{2} + 1 \}^2 =$$

۸ - ثابت کرو کہ

$$\{ \dots + \frac{(2-n)(1-n)n}{21 \times 14 \times 6} + \frac{(1-n)n}{14 \times 6} + \frac{n}{6} + 1 \}^2 =$$

$$\{ \dots + \frac{(2+n)(1+n)n}{4 \times 2 \times 2} + \frac{(1+n)n}{2 \times 2} + \frac{n}{2} + 1 \}^2 =$$

۹ - ثابت کرو کہ جب لا نہایت چھوٹا ہو تو

$$(تقریباً) \quad \frac{2}{159} - 1 = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{2}{9} - 1 \right)^2 \left(\frac{2}{9} + 1 \right)}{2 \left(\frac{2}{9} + 1 \right)^2}$$

۱۰ - ثابت کرو کہ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو $(4.2 + 5)n$ کا صحیح حصہ طاق ہوگا

۱۱ - ثابت کرو کہ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو $(4.3 + 8)n$ کا صحیح حصہ

طاق ہوگا۔

۱۲ - $(1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^n n)$ کی صورت تفصیلی میں

لا کا سرور یافت کرو۔

کی صورت تفصیلی میں لان کے سر کے برابر ہے۔

$$\dots + \frac{n^3(n^2-1)}{2 \times 1} + n^3(n-1) + (n-1)$$

۱۰۰۔ اہوگا اگر ن کی شکل، بالترتیب

۳۳ م - ۱۳۳ م + ۱۳۳ م -

۱۶۔ (۱) + (ب + ج) کی صورت تفصیلی میں (۱) تعداد و ارقام
(۲) رقموں کے سروں کا مجموعہ دریافت کرو۔
۱۷۔ اگر ن جفت، عدد ہو تو نہایت کرو کہ

$$\frac{1 - u_2}{u_2} = \frac{1}{1 - u_2} + \dots + \frac{1}{u_2 - u_3} + \frac{1}{u_3 - u_4} + \dots + \frac{1}{u_{n-1} - u_n} + \frac{1}{u_n - 1}$$

۱۸۔ اگر (۱ + لا) کی صورت تفصیلی میں رقموں کے سر
ج ج ج ج ج جن ہوں جبکہ ن ثابت صحیح عدد ہے تو
ثابت کرو کہ

$$(1) \text{ج.} - \text{ج.}_1 + \text{ج.}_2 - \text{ج.}_3 + \dots + (-1)^n \text{ج.}_n$$

$$\frac{\frac{1}{1-x}}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$(2) \text{ ج. } 1 - \text{ج. } 2 + \text{ج. } 3 - \text{ج. } 4 + \dots + (-1)^n (1 + n) \text{ ج. } n = 0$$

$$(3) \text{ ج}^2 - \text{ج}^1 + \text{ج}^0 - \text{ج}^1 + \dots + (1) \text{ ج}^0 = \text{اگر ن سلاق ہو}$$

باب پانزدہم

مسئلہ کثیر الارقام

۱۹۸۔ اس سے پہلے ہم نے دفعہ ۱۰۰ میں دیکھا ہے کہ مسئلہ شنائی کی مدد سے جملہ کثیر الارقام کی صورت تفصیلی حاصل ہو سکتی ہے، اس باب میں ہمارا مقصد جملہ کثیر الارقام کی مکمل صورت تفصیلی حاصل کرنا اتنا نہیں ہے جتنا کہ کسی رقم معینہ کا سرور یافت کرنا۔

مثال۔ جملہ (۱ + ۲ + ۳ + ۴) کی صورت تفصیلی میں
۱ ۲ ۳ ۴ کا سرور یافت کرو۔

مطلوبہ صورت تفصیلی ۱۲ اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے جن میں سے ہر ایک جزو ضربی (۱ + ۲ + ۳ + ۴) ہے، نیز صورت تفصیلی میں ہر ایک رقم کی قوتوں کا مجموعہ ۱۲ ہے کیونکہ یہ ۱۲ اجزائے ضربی میں سے ہر ایک جزو ضربی سے ایک ایک حرف لینے سے بنتی ہے، پس رقم ۱ ۲ ۳ ۴ کو مرتب کرنے کے لیے ہمیں ۱ کو چودہ اجزائے ضربی میں سے کسی چار اجزائے ضربی سے، ۲ کو باقی ماندہ دس اجزائے ضربی میں سے کسی دو اجزائے ضربی سے، اور ۳ کو باقی ماندہ آٹھ اجزائے ضربی میں سے کسی تین اجزائے ضربی سے لینا

چاہیے لیکن ایسا کرنے کے کل طریقوں کی تعداد صرف ۱۴۱۱ ایسے حروف کو باہم ترتیب دینے کی تعداد کے برابر ہے جن میں سے چار تو 'ب'، 'و'، 'ب'، 'تین ج اور پانچ و' یعنی

$$\begin{array}{r} ۱۴۱ \\ \hline ۴ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۵ \end{array} =$$

اس لیے معلوم ہوا کہ رقم ۱۴۱۱ ب ج و آخری حاصل ضرب میں دفعہ شامل ہوتی ہے اس لیے مطلوب = ۲۵۲۲۵۲۔

$$\begin{array}{r} ۱۴۱ \\ \hline ۴ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۵ \end{array}$$

۱۹۹ - (۱ + ب + ج + د + کی صورت تفصیلی میں کسی رقم معینہ کا سیرور یافت کرو، اس میں ع قیمت صحیح عدد سے مطلوبہ صورت تفصیلی ایسے ع اجزائے ضربی حاصل ضرب ہے جن میں سے ہر ایک جزو ضربی ۱ + ب + ج + د + کے برابر ہے اب چونکہ صورت تفصیلی میں ہر ایک رقم ان ع اجزائے ضربی میں سے ہر ایک جزو ضربی سے ایک ایک حرف لینے سے بنتی ہے اس لیے آخری حاصل ضرب میں کسی رقم ۱ + ب + ج + د + کے شامل ہونے کے کل طریقوں کی تعداد ایسے ع حروف کی مختلف ترتیبوں کی تعداد کے برابر ہے جن میں ۱ کی تعداد ع ہو، ب کی تعداد ج ہو اور ج کی تعداد جہ اور علیٰ ہذا القیاس - یعنی

۱ + ب + ج + د + کا سر ہے۔

ع

عہ ب جہ لہ

جہاں عہ + ب + ج + لہ + = ع

نتیجہ صریح - $(۱ + ب + لا + ج + لا + لا +)$ ع

کی صورت تفصیلی میں وہ رقم جس میں ۱ ب ۱ ج ۱ شامل ہوتا ہے یہ ہے

۱ (ب لا) (ج لا) (ج لا) لہ

اع

ع ب ج لہ

۱ ب ۱ ج ۱ لہ لا ب + ج ۲ + ل ۳ + یا

ع ب ج لہ

جہاں ع + ب + ج + لہ + = ع
اس کو ہم صورت تفصیلی کی رقم عام کہینگے۔

مثال - $(۱ + ب + لا + ج + لا)$ ۹ کی صورت تفصیلی میں لاکھ

دریافت کرو۔

صورت تفصیلی کی رقم عامہ ہے۔

۹ ۱ ب ۱ ج ۱ لہ + ج ۲ + (۱)

ع ب ج

جہاں ع + ب + ج = ۹
ہمیں قاعدہ آزمائش سے یہ اور جہ کی تمام مثبت صحیح قیمتیں معلوم کرنی ہیں جو شرائط مساوات ب + ۲ ج = ۵ کو پورا کریں، اس کے بعد ع کی قیمتیں مساوات ع + ب + ج = ۹ سے معلوم ہو سکتی ہیں۔

اگر ج = ۲ تو ب = ۱ اور ع = ۶

اگر ج = ۱ تو ب = ۳ اور ع = ۵

اگر ج = ۰ تو ب = ۵ اور ع = ۴

سر مطلوب جملہ (۱) کی متناظر قیمتوں کا مجموعہ ہوگا۔

$$= 5 \times 121 + 2 \times 50 + 1 \times 252 =$$

میں رقم عامہ دریافت کرو جہاں ن کوئی مقدار ناطق ہے۔

اسلئے شنائی کی مدد سے رقم عامہ ہے۔

جہاں ع مشیت صحیح عدد ہے۔

$$\begin{array}{r} \text{ع} \\ \hline \text{ب} \end{array} \quad \text{ب} \text{ ج د} \dots \text{لا} \text{ ب} + \text{ج} + \text{د} + \dots$$

جہاں بہ، جہ، لہ..... ایسے مثبت صحیح عدد ہیں جن کا مجموعہ
ع-ہے۔

پس جملہ مجوزہ کی صورت تفصیلی ہیں رقم عامہ ہوئی۔

جہاں $y = \dots + j + k + \dots + e$

۲۰۱۔ چونکہ (ا + ب + ج + لا + و +) صورت

۱) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \dots$ میں بھی لکھا جاسکتا ہے

اس لیے صرف اُسی صورت پر غور کرنا کافی ہو گا جس میں جملہ کثیر الارقام کی پہلی رقم ایک ہو۔

پس (۱ + ب لا + ج لا + د لا +) کی رقم عامہ ہے

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-x+1)}{x!} = \frac{n!}{x!}$$

جہاں یہ + جہ + کہ + = ع

مثال۔ (۱-۳-۲-۱ + ۶-۳) $\frac{2}{3}$ کی صورتِ تفصیلی میں لاکھ اس

دریافت کرو۔

اس جیلے کی رقم عامہ ہے۔

$$\frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n!}$$

(1).....

ہمیں قاعدہ آزمائش سے یہ، جہ، لہ کی تمام مثبت صحیح قیمتیں دریافت کرنی ہیں جو شرائط مساوات بہ + ۲ جہ + ۳ لہ = ۳ کو پورا کریں اس کے بعد مساوات ع = بہ + جہ + لہ سے معلوم ہو سکتا ہے ہر مطلوب جملہ (۱) کی مطابق قیمتوں کا مجموعہ ہوگا۔

یہ، کہ کی قیمتیں دریافت کرنے کے لیے بہتر ہوگا کہ کہ کی بڑی سے بڑی جائز مثبت صحیح قیمت سے شروع کر کے اس کو تمام صحیح مثبت قیمتیں یکے بعد دیگرے دی جائیں، صورت زیر بحث میں قیمتیں مفصلہ ذیل ہیں :-

ل = ا' جم = ب' = ع' = ا = ۱

۲ = ع' = ا' = ج' = ل'

لہ۔ = ۰، جہ = ۰، بہ = ۰، ع = ۳

ان قیمتوں کو (۱) میں رکھنے سے سر مطلوب

$$\frac{r(r-1)(\frac{r}{r}-1)(\frac{1}{r}-1)\frac{r}{r}}{[r]} + (r-1)(r-1)(\frac{1}{r}-1)(\frac{r}{r}) + (r)(\frac{r}{r}) =$$

۲۰۲۔ بعض اوقات مسئلہ شنائی کی مدد سے جملہ کثیر الارقام کا پھیلاؤ زیادہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال۔ (۱-۲+۳ لا) کی صورت تفصیلی میں لا کا سروریافت کرو۔

اگر (۱-۲ لا-۳ لا) کو مسئلہ شنائی کی مدد سے پھیلا دیا جائے تو

سر مطلوب پھیلاؤ کی پہلی چند رقموں سے لا کا سر منتخب کرنے سے حاصل ہوگا، پہلی چند رقمیں یہ ہیں۔

۱+۳ (۲ لا-۳ لا) + ۲ (۲ لا-۳ لا) + ۱ (۲ لا-۳ لا) + ۱۵ (۲ لا-۳ لا)
اس جملہ کو صرف پانچویں رقم تک پھیلا نا کافی ہے کیونکہ اس کے بعد کی رقموں میں لا سے اعلیٰ قوتیں شامل ہیں۔

$$\text{سر مطلوب} = ۶ \times ۹ + ۱۰ \times ۳ (۲-۳) + ۱۵ (۲)$$

$$= ۶۶$$

امثلہ نمبر ۱۵

سروریافت کرو۔

- ۱۔ (۱-ب-ج+د) کی صورت تفصیلی میں ۱^اب ۳^جج ۲^دد کا
- ۲۔ (۱+ب-ج-د) کی صورت تفصیلی میں ۱^اب ۵^دد کا
- ۳۔ (۱+۲+ب+۳ج) کی صورت تفصیلی میں ۱^اب ۳^جج کا
- ۴۔ (۱ لا-ب+ج ی) کی صورت تفصیلی میں لا ۲^اما ۳^یی کا
- ۵۔ (۱+۳ لا-۲ لا) کی صورت تفصیلی میں لا ۳^اکا
- ۶۔ (۱+۲ لا+لا) کی صورت تفصیلی میں لا ۴^اکا
- ۷۔ (۱+۲ لا-لا) کی صورت تفصیلی میں لا ۶^اکا
- ۸۔ (۱-۲ لا+۳ لا-۴ لا) کی صورت تفصیلی میں لا ۸^اکا
- ۹۔ (۱-۲ لا+۳ لا-۴ لا) کی صورت تفصیلی میں لا ۲۳^اکا
- ۱۰۔ (۱-۲ لا+۳ لا) کی صورت تفصیلی میں لا ۹^اکا

لوکارقم

مثال - (۱) چونکہ $۸۱ = ۳^4$ اس لیے ۸۱ کا لوکارتم اساس ۳ پر کم ہے

۲۰۴۔ ن کا لوکارتم اساس ۱ پر بالعموم اس طرح لکھا جاتا ہے
لوک ن پس دونوں مساواتیں ۱ = ن ، اور لا = لوک ن

مثال - ۳۳ علام کا لوکار تم اساس ۲۴ پر دریافت کرو۔

فرض کرو کہ لا مطلوبہ لوکارتم ہے، تب

$$\overline{۴۵} \times ۳۲ = \overline{۲۱۲} \quad \text{بموجب تعریف}$$

$$\frac{۲}{۵} \times ۵۲ = \overline{۲} \times ۲ \quad \therefore$$

$$\frac{۲}{۵} + ۵۲ = \overline{۲} \quad \therefore$$

اس لیے قوت نمائوں کو مساوی رکھنے سے

$$\frac{۳}{۲} = \overline{۲} = \frac{۲۶}{۵} \quad \therefore \frac{۲۶}{۵} = \overline{۲} = \frac{۱۸}{۵} = ۳۶$$

۲۰۵۔ جب یہ معلوم ہو کہ کوئی خاص نظام لوکارتمی استعمال میں ہے تو حرف آخرہ کو جس سے اساس تعبیر ہوتا ہے حذف کر دیتے ہیں۔ پس عملی حسابات میں جہاں اساس ہمیشہ دس ہوتا ہے اکثر لوک ۲، لوک ۳، کی بجائے اختصاراً لوک ۲، لوک ۳، لکھتے ہیں۔

لوکارتم کا اساس کوئی عدد ہو سکتا ہے اور کسی دیے ہوئے اساس کے جواب میں تمام اعداد کے لوکارتم معلوم ہو سکتے ہیں۔ پیشتر اس کے کہ ہم مروج لوکارتمی جدولوں پر بحث کریں ہم چند ایسے مسائل عامہ ثابت کریں گے جو تمام لوکارتموں کے لیے درست ہیں خواہ اساس کچھ ہی ہو۔

۲۰۶۔ ایک کا لوکارتم صفر ہے

۱ کی تمام قیمتوں کے لیے ۱ = ۱

لوک ۱ = ۱۔ خواہ اساس کچھ ہی ہو

۲۰۷۔ اساس کا اپنا لوکارتم ایک ہے

چونکہ ۱ = ۱ اس لیے لوک ۱ = ۱

اساس کی کسی قوت (مثلاً ۱۸) کا لوکارتم ۸ ہے اور اساس کے

مستحافی کا لوکارتم - اسے -

۲۰۸ - دیے ہوئے عددوں کے حاصل ضرب کا لوکارتم دریافت کرو۔
فرض کرو کہ م ن حاصل ضرب ہے اور لا اساس ہے اور فرض کرو کہ
لا = لوک م، ما = لوک ن

پس لا = م اور لا = ن

پس حاصل ضرب م ن = لا x لا = لا + لا

جس سے بموجب تعریف، لوک م ن = لا + لا = لوک م + لوک ن اسی
طرح سے لوک م ن ف = لوک م + لوک ن + لوک ف
اور علیٰ ہذا القیاس، اجزائے ضربی کی کسی تعداد کے لیے

مثال - لوک ۲۲ = لوک (۲ x ۳ x ۷)
= لوک ۲ + لوک ۳ + لوک ۷

۲۰۹ - ایک کسر کا لوکارتم دریافت کرو

اگر $\frac{م}{ن}$ ایک دی ہوئی کسر ہو، تو فرض کرو کہ

لا = لوک م اور ما = لوک ن

پس لا = م اور لا = ن

اور کسر $\frac{م}{ن} = \frac{لا}{لا} = لا - لا$

جس سے بموجب تعریف، لوک $\frac{م}{ن} = لا - لا = لوک م - لوک ن$

مثال - لوک $(\frac{۲}{۴}) = لوک ۲ - لوک ۴$

= لوک ۳ - لوک ۷

= لوک (۲ x ۳ x ۵) - لوک ۷

$$= \text{لوک } ۲ + \text{لوک } ۳ + \text{لوک } ۵ - \text{لوک } ۷$$

۲۱۰۔ ایک عدد کی کسی منطق قوت کا لوکارتم معلوم کرو۔

اگر لوک (م) مطلوب ہو تو فرض کرو کہ۔

$$\text{لا} = \text{لوک } م \text{ پس } \text{لا} = م$$

$$\text{تب } م = (\text{لا})^ت = \text{لا}^ت$$

جس سے، بموجب تعریف، لوک (م) = ت لا

یعنی لوک (م) = ت لوک م

اسی طرح سے لوک (م) = $\frac{1}{ت}$ لوک م

$$\text{مثال ۱۔} \quad \text{لوک } \frac{۵ \times ۳ \times ۲}{۱۱ \times ۲} = \frac{۵۴۰}{۵۳۹}$$

$$= ۲ \text{ لوک } ۲ + ۳ \text{ لوک } ۳ + \text{لوک } ۵ - ۲ \text{ لوک } ۷ - \text{لوک } ۱۱$$

$$\text{مثال ۲۔} \quad \text{لوک } \frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳}} = \frac{۳}{۲۱۶}$$

$$= \frac{۲}{۳} \text{ لوک } ۷ - \frac{۱}{۲} \text{ لوک } ۳ - \frac{۱}{۳} \text{ لوک } ۷$$

$$= \frac{۱۱}{۲۱} \text{ لوک } ۷ - \frac{۱}{۲} \text{ لوک } ۳$$

۲۱۱۔ نتائج مندرجہ بالا سے ظاہر ہے کہ

(۱) کسی حاصل ضرب کا لوکارتم اس کے اجزائے ضربی کے لوکارتموں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

(۲) کسی کسر کا لوکارتم اس حاصل تفریق کے برابر ہوتا ہے جو شمار کنندہ کے لوکارتم میں سے نسب نما کے لوکارتم کو منفی کرنے سے حاصل ہو۔

(۳) کسی عدد کی ت میں قوت کا لوکارتم اس عدد کے لوکارتم کا
ت گنا ہوتا ہے۔

(۴) کسی عدد کے ر میں جذر کا لوکارتم اس عدد کے لوکارتم کے
۱/۲ میں حصے کے برابر ہوتا ہے۔

نیز ہم دیکھتے ہیں کہ لوکارتموں کے استعمال سے اعمال ضرب
تقسیم، بالترتیب اعمال جمع، تفریق میں اور صعود، نزول بالترتیب اعمال
ضرب، تقسیم میں تبدیل ہو جاتے ہیں۔

مثال ۱۔ لوک $\frac{۳۲ \times ۳}{۱۸ \times ۴}$ کو لوک ۲، لوک ۳ اور لوک ۴ کی

رقوم میں بیان کرو۔

دیا ہوا جملہ = لوک (۳۲×۳) - لوک (۱۸×۴)

= لوک ۳ + لوک (۳۲) - { لوک ۴ + لوک (۱۸) }

= لوک ۳ + $\frac{۱}{۲}$ لوک ۳۲ - لوک ۴ - $\frac{۱}{۳}$ لوک ۱۸

= لوک ۳ + $\frac{۱}{۲}$ لوک (۲) - لوک (۲×۵) - $\frac{۱}{۳}$ لوک (۲×۳)

= لوک ۳ + $\frac{۵}{۲}$ لوک ۲ - (لوک ۳ + ۵ لوک ۲) - $\frac{۱}{۳}$ (لوک ۲ + ۲ لوک ۳)

= $(\frac{۲}{۳} - ۱)$ لوک ۳ + $(\frac{۵}{۲} - ۳ - \frac{۱}{۳})$ لوک ۲ - ۵ لوک ۲

= $\frac{۱}{۳}$ لوک ۳ - $\frac{۵}{۲}$ لوک ۲ - ۵ لوک ۲

مثال ۲۔ لوک $\frac{۳۱۵}{۵۶}$ کو لوک ۲، لوک ۳، لوک ۴ کی رقموں

میں بیان کرو

لوک $\frac{۳۱۵}{۵۶} = \frac{۳}{۲}$ لوک $\frac{۳۱۵}{۵۶}$

$$= \frac{3}{2} \text{ لوک ۱۔ (لوک ۵ + لوک ۲)}$$

$$= \frac{3}{2} \text{ لوک ۱} - ۵ \text{ لوک ۲} - ۲ \text{ لوک ۳}$$

طرفین کے لوکار تم لینے سے حاصل ہوگا۔

لا (لوک ۱ - ۲ لا لوک ج) = (۳ لا + ۱) لوک ب
 لا (لوک ۱ - ۲ لوک ج - ۳ لوک ب) = لوک ب

$$\therefore \frac{\text{لوک ب}}{\text{لوک د} - \text{لوک ج} - \text{لوک ب}} = 11$$

۱. مثلہ نمبری ۱۱۶

لوکار تم دریافت کرو۔

- ۱۔ ۱۶ کا اساس ۲ پر اور ۱۷ کا اساس ۲ پر

- "P" "б.с.д" "д.с." "б.с.д" - 2

- $$" 9 " \quad b \sin " \quad \sqrt{r} = b \frac{1}{r \sin} \quad - 3$$

- " 5.1 " б1... " 2 " б5.420 - П

- $$\sqrt{9} = 3 \text{ } \because \text{ } 3 \times 3 = 9 \text{ } \therefore \text{ } \sqrt{9} = 3 \text{ } \text{---} \Delta$$

- $$n \cdot f = b \sqrt{\frac{10}{r}} \cdot \frac{1}{f} \cdot \sqrt{\frac{h}{\delta}} \cdot \sqrt{r^2 - y^2}$$

- ۷۔ ذیل کے لوکارتموں کی قیمتیں دریافت کرو۔

لوک ۱۲۸، لوک $\frac{1}{4}$ ، لوک $\frac{1}{2}$ ، لوک $\frac{1}{8}$ ، لوک $\frac{1}{16}$

ذیل کے سات لوکارتموں کو لوک ۱، لوک ۲، لوک ۳، کی رقوم میں بیان کرو۔

۸۔ لوک $(\overline{128} \div \overline{2})$ ۹۔ لوک $(\overline{128} \times \overline{2})$

۱۰۔ لوک $(\overline{128} \div \overline{4})$ ۱۱۔ لوک $(\overline{128} \times \overline{4})$

۱۲۔ لوک $(\overline{128} \div \overline{8})$

۱۳۔ لوک $\frac{\overline{128} \div \overline{2} - \overline{2}}{(\overline{128} \div \overline{4} - \overline{4})}$

۱۴۔ لوک $\left\{ \left(\frac{\overline{128} \div \overline{2} - \overline{2}}{\overline{128} \div \overline{4} - \overline{4}} \right) \div \left(\frac{\overline{128} \div \overline{8} - \overline{8}}{\overline{128} \div \overline{16} - \overline{16}} \right) \right\}$

۱۵۔ ثابت کرو کہ لوک $\frac{\overline{128} \times \overline{5}}{\overline{128} \times \overline{18}}$

$$= \frac{1}{4} \text{ لوک } ۵ - \frac{2}{5} \text{ لوک } ۲ - \frac{2}{3} \text{ لوک } ۲$$

۱۶۔ لوک $\sqrt[3]{\overline{128} \times \overline{9} - \overline{9}}$ کو مختصر کرو۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ لوک $\frac{45}{16} - ۲ \text{ لوک } \frac{5}{9} + \text{لوک } \frac{32}{223} = \text{لوک } ۲$

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

۱۸۔ $\overline{1} = \text{ج } \overline{1}$ ۱۹۔ $\overline{1} \times \overline{1} = \text{ج } ۵$

$$۲۰ - \frac{۱+۱}{۱-۱} = ج^۲ - ۲۱ - \left\{ \begin{array}{l} ۱^۲ \times ۱^۳ = م \\ ۱^۳ \times ۱^۲ = م \end{array} \right.$$

۲۲ - اگر لوک (لا^۲) = ۱ اور لوک (۱/۱) = ب تو لوک لا اور لوک ما کی قیمتیں دریافت کرو۔

$$۲۳ - اگر ۱^۲ \times ۱^۳ = ۱^۵ \times ۱^۳ \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{لا لوک} = \left(\frac{۱}{۱}\right) = لوک ۱$$

۲۴ - مساوات ذیل کو حل کرو۔

$$(۱^۲ - ۱^۲ + ۱^۲) = (۱ - ۱) = (۱ + ۱) = ۲$$

مروج لوکارتم

۲۱۲ - اساس ۱۰ پر جو لوکارتم لیے گئے ہوں ان کو مروج لوکارتم کہتے ہیں۔ اس نظام کو ۱۵۱۶ء میں برٹش نے رائج کیا جو نیپیر موجد لوکارتم کا ہم عصر تھا۔

مساوات ۱۰ = ن سے ظاہر ہے کہ مروج لوکارتم بالعموم صحیح عدد نہیں ہوتے اور نہ وہ ہمیشہ مثبت ہوتے ہیں مثلاً

$$۳۱۵۴ < ۱۰ \text{ اور } ۱۰ > ۱$$

$$\therefore \text{لوک } ۳۱۵۴ = ۳ + ۱ \text{ ایک کسر}$$

$$\text{نیز } ۵.۶ < ۱۰ \text{ اور } ۱۰ > ۱$$

$$\text{اس لیے لوک } ۵.۶ = ۲ - ۱ \text{ ایک مثبت کسر}$$

۲۱۳ - تحریف کسی لوکارتم کے صحیح حصہ کو ممیز اور حصہ

اعشاریہ کو اعشاریہ لوکارتمی کہتے ہیں۔

مثال - لوک ۲۰ = ۱۰۳۰

اس میں لوک ۲۰ کا ممیز ایک ہے اور اس کا اعشاریہ لوکارتم ۱۰۳۰ ہے کسی عدد کے لوکارتم کا ممیز اساس ۱۰ پر صرف دیکھنے سے ہی لکھا جاسکتا ہے جیسا کہ دفعات ذیل سے ظاہر ہوگا۔

۲۱۲ - کوئی عدد ایک سے بڑا ہے اس کے لوکارتم کا ممیز دریافت کرو۔

چونکہ $1 = 1$

$10 = 10$

$100 = 100$

$1000 = 1000$

یہ حاصل ہوتا ہے کہ جس عدد کے صحیح حصہ میں صرف ایک ہندسہ ہو وہ ۱۰ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہوگا اور جس عدد کے صحیح حصہ میں دو ہندسے ہوں وہ ۱۰ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہوگا اور جس عدد کے صحیح حصہ میں تین ہندسے ہوں وہ ۱۰ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہوگا اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس لیے معلوم ہوا کہ ایسا عدد جس کے صحیح حصے میں n ہندسے ہوں وہ $10^n - 1$ اور 10^n کے درمیان واقع ہوگا۔

اگر m ایسا عدد ہو جس کے صحیح حصے میں n ہندسے ہوں تو

$$m = 10^n + (10^n - 1) \text{ ایک مثبت کسر واجب}$$

یہ لوک $m = 10^n + (10^n - 1)$ ایک مثبت کسر واجب لوکارتم کا ممیز $(10^n - 1)$ ہے پس معلوم ہوا کہ اگر کوئی عدد ایک سے بڑا ہو تو اس کے لوکارتم کا ممیز مثبت ہوگا اور n ہندسوں کی تعداد سے جو اس کے صحیح حصے میں ہوں بقدر ایک کے کم ہوگا۔

مثال - $125 < 10^3$ اور $10^3 > 10$

∴ لوک $۱۲۵ = ۲ +$ اعشاریہ لوکارتمی

اس لیے لوک ۱۲۵ کا ممیز ۲ ہے

$$۲۳۵۴ < ۱۰ \text{ اور } ۱۰ > ۲۳۵۴$$

اس لیے لوک ۲۳۵۴ کا ممیز ۳ ہے

$$۶۷۵۰ < ۱۰ \text{ اور } ۱۰ > ۶۷۵۰$$

اس لیے لوک ۶۷۵۰ کا ممیز ایک ہے

۲۱۵ - کسی کسر اعشاریہ کے لوکارتم کا ممیز دریافت کرو۔

$$\text{چونکہ } ۱ = ۱۰$$

$$۱ = \frac{۱}{۱۰} = ۱۰^{-۱}$$

$$۱۰ = \frac{۱}{۱۰۰} = ۱۰^{-۲}$$

$$۱۰۰ = \frac{۱}{۱۰۰۰} = ۱۰^{-۳}$$

اس سے ظاہر ہے کہ جس کسر اعشاریہ میں علامت اعشاریہ کے بعد ایک صفر ہو (مثلاً ۳۲۰.۵ جو ۱.۵ سے بڑی ہے اور ۱.۵ سے چھوٹی ہے) وہ $۱۰^{-۱}$ اور $۱۰^{-۲}$ کے درمیان واقع ہوگی اور وہ کسر جس میں علامت اعشاریہ کے بعد دو صفر ہوں وہ $۱۰^{-۲}$ اور $۱۰^{-۳}$ کے درمیان واقع ہوگی اور علیٰ هذا القیاس اس سے معلوم ہوا کہ ایسی کسر اعشاریہ جس میں علامت اعشاریہ کے عین بعد n صفر ہوں وہ $۱۰^{-(n+1)}$ اور ۱۰^{-n} کے درمیان واقع ہوگی۔

فرض کرو کہ E کوئی کسر اعشاریہ ہے جس میں علامت اعشاریہ کے عین بعد n صفر ہیں۔

$$\text{تو } E = ۱۰^{-(n+1)} + \text{ایک مثبت کسر واجب}$$

$$\therefore \text{لوک } E = -(n+1) + \text{ایک مثبت کسر واجب}$$

اس لیے ممیز مطلوب - (ن + ۱) ہے یعنی معلوم ہوا کہ ہر ایک کسر اعشاریہ کے لوکارتم کا ممیز منفی ہوتا ہے اور علامت اعشاریہ کے عین بعد جتنے صفر ہوں ان کی تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہوتا ہے

مثال - $۳ = \frac{۳}{۱}$ جو $\frac{۳}{۱} < ۱$ اور $۱ > ۱$

یعنی $۳ < ۱۰$ اور $۱۰ > ۱$

اس لیے لوک $۳ = -۱ +$ ایک مثبت کسر اعشاریہ

اس لیے لوک ۳ کا ممیز -۱ ہے

$۳۵ = ۱۰ - ۱$ اور $۱۰ > ۱$

یعنی $۳۵ < ۱۰$ اور $۱۰ > ۱$

اس لیے لوک $۳۵ = -۲ +$ ایک مثبت کسر اعشاریہ

اس لیے لوک ۳۵ کا ممیز -۲ ہے

$۳۷۸۱ = ۱۰۰۰۰ - ۱$ اور $۱۰۰۰۰ > ۱$

یعنی $۳۷۸۱ < ۱۰۰۰۰$ اور $۱۰۰۰۰ > ۱$

اس لیے لوک ۳۷۸۱ کا ممیز -۵ ہے۔

۲۱۶ - ایک سے لیکر ۲۰۰۰۰ تک تمام صحیح اعداد کے لوکارتم

اس ۱۰ پر نکالے گئے ہیں اور ان کو جدولوں کی شکل میں لکھا گیا ہے، اکثر لوکارتمی جدولوں میں لوکارتم اعشاریہ کے ساتھ مقام تک مندرج ہوتے ہیں عملی کام میں اس ۱۰ پر نکالے ہوئے لوکارتم زیادہ تر استعمال ہوتے ہیں اس نظام کے دو بڑے فوائد یہ ہیں:-

(۱) ان نتائج سے جو ہم اوپر ثابت کر چکے ہیں ظاہر ہے کہ

ممیز صرف دیکھنے ہی سے لکھے جاسکتے ہیں اس لیے جدولوں میں صرف اعشاریہ لوکارتمی مندرج کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔

(۲) جن عددوں کے ملحوظ ہندسے بلحاظ ترتیب کے ایک ہی ہوں
 ان میں سے ہر ایک کا اعشاریہ لوکارتمی وہی ہوتا ہے۔ پس اس
 نظام میں صرف صحیح اعداد کے اعشاریہ لوکارتمی کو جدولوں
 میں مندرج کرنا کافی ہوتا ہے۔ اگلی دفعہ میں اس کا
 ثبوت دینگے۔

نوٹ۔ کسی عدد کے ملحوظ ہندسے وہ ہوتے ہیں جو اول
 اور آخر سے تمام صفر دور کرنے پر باقی رہ جائیں مثلاً ۳۲۰۱۶۔۰
 اور ۳۲۰۱۶۰۰۰ کے ملحوظ ہندسے ۳۲۰۱۶ ہیں۔

۲۱۷۔ فرض کرو کہ ن کوئی عدد ہے۔ اگر اسے دس کی کسی
 قوت سے ضرب دی جائے یا اس کو دس کی کسی قوت پر تقسیم
 کیا جائے تو صرف مقام اعشاریہ میں فرق آتا ہے مگر ہندسوں کی
 ترتیب نہیں بدلتی۔ اس سے ظاہر ہے کہ ن ۱۰ x اور ن ۱۰ ÷
 (جہاں ف اور ق دونوں صحیح ہیں) ایسے اعداد ہیں جن کے ملحوظ
 ہندسے وہی ہیں جو ن کے ہیں۔

$$\text{اب } \text{لوک (ن} \times 10) = \text{لوک ن} + \text{ف لوک ۱۰}$$

$$= \text{لوک ن} + \text{ف} \dots\dots\dots (۱)$$

$$\text{نیز لوک (ن} \div 10) = \text{لوک ن} - \text{ق لوک ۱۰}$$

$$= \text{لوک ن} - \text{ق} \dots\dots\dots (۲)$$

ظاہر ہے کہ ربط (۱) میں لوک ن پر صرف ایک صحیح عدد کا اضافہ
 ہو گیا ہے اور (۲) میں ایک صحیح عدد لوک ن میں سے تفریق
 کیا گیا ہے یعنی ثابت ہوا کہ ہر صورت میں اعشاریہ لوکارتمی وہی
 رہتا ہے۔ اس دفعہ میں اور تین گزشتہ دفعات میں اعشاریہ
 لوکارتمی مثبت فرض کیا گیا ہے۔ نظام برکس سے پورا فائدہ
 اٹھانے کے لیے ہم اپنے حسابی اعمال میں اس بات کا خیال
 رکھتے ہیں کہ اعشاریہ لوکارتمی ہمیشہ مثبت رہے تاکہ

جب ہم اعشاریہ لوکارتمی کو جدولوں سے لیں تو فقط ممیز کو مع اس کی مناسب علامت کے اس کے مقابل لکھ دیں۔

۲۱۸۔ منفی لوکارتم کی صورت میں منفی علامت کو ممیز کے اوپر لکھتے ہیں اور اس کے پیلے نہیں لکھتے تاکہ یہ معلوم ہو کہ صرف ممیزی منفی ہے اور پورا جملہ منفی نہیں ہے پس ۳۰۱۰۳ و ۴ جو ۲... کا لوکارتم ہے $= ۴ - ۳۰۱۰۳$ اسکو $- ۳۰۱۰۳$ و ۴ سے مختلف خیال کرنا چاہیے جو ایک ایسا جملہ ہے جس میں حصص صحیح اور اعشاریہ دونوں منفی ہیں۔ اعشاریہ لوکارتمی کو مثبت بنانے کے لیے بعض اوقات ذیل کی حسابی ترکیب مفید ثابت ہوتی ہے مثلاً فرض کرو کہ کسی سوال کے حل میں مقدار ۳۶۹۸۹۷ واقع ہوتی ہے جس میں پورا جملہ منفی ہے، اگر ہم ممیز سے ایک منفی کریں اور اعشاریہ لوکارتمی میں ایک جمع کریں تو کوئی ہونی مقدار معیاری صورت میں تحویل ہوتی ہے۔

$$\text{یعنی} - ۳۶۹۸۹۷ = ۴ - (۱ - ۳۶۹۸۹۷)$$

$$= ۳۰۱۰۳ و ۴$$

اس قسم کی اور کئی صورتیں آگے دیکھنے میں آئیں گی۔

مثال ۱۔ ۳۶۹۸۹۷ کا لوکارتم دریافت کرو۔

جدولوں سے ہمیں معلوم ہوگا کہ لوک ۳۶۹۸۹۷ کا اعشاریہ لوکارتمی ۳۶۹۸۹۷۳۸ ہے۔ [جدولوں میں علامت اعشاریہ اور ممیز نہیں دیے جاتے] نیز بموجب دفعہ ۲۱۵ دیے ہوئے عدد کے لوکارتم کا ممیز ۴ ہے۔

$$\text{لوک } ۳۶۹۸۹۷۳۸ = ۳۰۱۰۳ و ۴$$

مثال ۲۔ ۱۶۵۷۰۰۰۰ کی قیمت دریافت کرو۔ دیا گیا ہے کہ

$$\text{لوک } ۱۶۵ = ۳۹۸۴۱۷۲ اور لوک } ۲۹۷۸۹۶۸ = ۳۸۴۳۵$$

فرض کرو کہ لاقیمت مطلوبہ ہے تب

لوک لا = لوک (۱۶۵.....۵) = $\frac{1}{5}$ لوک (۱۶۵.....۵)

= $\frac{1}{5}$ (۴۸۳۹ ۶۵۲۱) کیونکہ لوک ۱۶۵.....۵ کا اعشاریہ لوکارتمی وہی

ہے جو لوک ۱۶۵ کا ہے اور بموجب دفعہ ۲۱۵ میسر - ۶ ہے -

اب $\frac{1}{5}$ (۴۸۳۹ ۶۵۲۱) = $\frac{1}{5}$ (۴۸۳۹ ۶۵۲۱ + ۱۰) =

= ۲۵۸۴۳۴۹۶۸

اور لوک ۴۴۴ ۶۹۷ کا اعشاریہ لوکارتمی ۲۵۸۴۳۴۹۶۸ ہے اس لیے

معلوم ہوا کہ لا ایک ایسا عدد ہے جس میں ہندسے تو یہی ہیں مگر علامت

اعشاریہ کے بعد ایک صفر ہے پس لا = ۴۴۴ ۶۹۷ - ۵

۲۱۹ - لوکارتم نکالنے کا طریقہ اگلے باب میں بیان ہوگا اور وہاں

معلوم ہوگا کہ پہلے لوکارتم کسی اور اساس کے موافق دریافت کیے

جاتے ہیں اور بعد میں ان کی تحویل (اساس ۱۰ پر) مروج

لوکارتموں میں کی جاتی ہے۔

اس لیے ضروری ہے کہ ہم کسی ایک نظام لوکارتمی کو جس کا

اساس معلوم ہو کسی نئے نظام لوکارتمی میں جس کا اساس مختلف ہو

تبدیل کرنے کا طریقہ دریافت کریں۔

۲۲۰ - فرض کرو کہ کل اعداد کے لوکارتم اساس ۱ پر معلوم ہیں

اور جدولوں میں مندرج ہیں اور اساس ب پر لوکارتم نکالنا ہے۔

فرض کرو کہ ن کوئی عدد ہے جس کا لوکارتم اساس ب پر نکالنا

مطلوب ہے، فرض کرو کہ ما = لوک ب ن یعنی ہا = ن

لوک (ہا) = لوک ب ن

یعنی ما \times لوک ب = لوک ب ن

ما = $\frac{\text{لوک ب ن}}{\text{لوک ب}}$

یا لوک پ ن = $\frac{ا}{لوک و ب}$ x لوک و ن (۱)

اب چونکہ ن اور ب معلوم ہیں اس لیے لوک و ن اور لوک و ب جدولوں سے معلوم ہو سکتے ہیں اور اس طرح لوک و ن معلوم ہو سکتا ہے۔

پس ظاہر ہے کہ لوکارتموں کو اساس و اسے اساس ب میں تبدیل کر سنے کے لیے صرف اتنا ضروری ہے کہ ہم انھیں

لوک و ب سے ضرب دیں، یہ ایک مستقل مقدار ہے جو جدولوں

سے معلوم ہو سکتی ہے، $\frac{ا}{لوک و ب}$ کو لوکارتموں کا مقیاس

کہتے ہیں۔

۲۲۱۔ دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) میں ن کی جگہ و لکھنے سے

$$لوک پ و = \frac{ا}{لوک و ب} \times لوک و و = \frac{ا}{لوک و ب}$$

$$لوک پ و \times لوک و ب = ا$$

اس نتیجہ کو بالتراست ہم اس طرح ثابت کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ لا = لوک و ب یعنی و = ب

اساس ب پر لوکارتم لینے سے

$$لا لوک پ و = لوک پ ب = ا$$

$$لوک و ب \times لوک پ و = ا$$

مثال ۱۔ لوک پ و x لوک چ ب x لوک و ج کو مختصر کرو۔

لوک ۱ = $\frac{۱}{لوک ب}$ x لوک ج اگر نیا اساس ج لیا جائے۔

اب لوک ۱ x لوک ج ب = $\frac{۱}{لوک ب}$ x لوک ج ۱ x لوک ج ب

= لوک ۱

∴ لوک ۱ x لوک ج ب x لوک ج

= لوک ۱ x لوک ج = لوک ۱

مثال ۲۔ لوک ۶۴ x لوک ۱۰ = لوک ۸ کو مختصر کرو۔

جملہ = لوک ۶۴ x $\frac{لوک ۱۰}{لوک ۸}$ = لوک ۶۴ x لوک ۱۰

= لوک ۶۴ = لوک ۸ = ۲

۲۲۲۔ اس جگہ ہم چند متفرق مثالیں دیں گے جن کی مدد سے یہ واضح ہو گا کہ لوکار تم بالعموم اعمال حسابیہ کو بہت آسان بنا دیتے ہیں لیکن لوکار تمی حدودوں کے استعمال کی تشریح کے لیے طالب علم کو چاہیے کہ علم مثلث حصہ اول کا مطالعہ کرے۔

مثال ۱۔ معلوم ہے کہ لوک ۳ = ۱۲۱۳ = ۴۷۷

معلوم کرو لوک $\left\{ \frac{۵}{۲} (۲۵۷) x (۵۸۱) \div (۹۰) \right\}$

قیمت مطلوبہ = ۳ لوک $\frac{۲۵}{۲} + \frac{۴}{۵}$ لوک $\frac{۵۸۱}{۱۰} - \frac{۵}{۹۰}$ لوک ۹۰

= ۳ (لوک ۳ - ۱) + $\frac{۲}{۵}$ (لوک ۲ - ۱) - $\frac{۵}{۹۰}$ (لوک ۱ + ۱)

= $(۹ - \frac{۱۶}{۵} + \frac{۵}{۲}) - ۳$ (لوک ۳ - ۱) = $(۹ - \frac{۱۶}{۵} + \frac{۵}{۲}) - ۳$

$$= \frac{94}{10} \text{ لوک } 3 - \frac{14}{20} \text{ } 5$$

طالب علم یہ غور سے دیکھے کہ ۵ یا ۵ کی کسی قوت کا لوکارتم ہمیشہ لوک ۲ سے حاصل ہو سکتا ہے مثلاً

$$\text{لوک } 5 = \text{لوک } \frac{10}{2} = \text{لوک } 10 - \text{لوک } 2 = \text{لوک } 1$$

مثال ۲ - (۸۷۵) میں ہندسوں کی تعداد دریافت کرو۔

معلوم ہے کہ لوک ۲ = ۳۰۰۱۰۳ اور لوک ۷ = ۸۰۰۹۵۰۸
لوک (۸۷۵) = ۱۶ لوک (۱۲۵ × ۷)

$$= 16 (\text{لوک } 7 + \text{لوک } 125)$$

$$= 16 (\text{لوک } 7 + 3 \text{ لوک } 5)$$

$$= 16 (\text{لوک } 7 + 3 - 3 \text{ لوک } 2)$$

$$= 16 \times 8009508 =$$

$$= 128128074$$

اس لیے ہندسوں کی تعداد ۸ ہے [دفعہ ۲۱]

مثال ۳ - لوک ۱۲ اور لوک ۳ معلوم ہیں

مسادرات ۳ - ۴ = ۴ × ۵ + ۸ = ۸ سے لا کی قیمت اعشاریہ کے

دو مقام تک دریافت کرو۔

طرفین کے لوکارتم لینے سے حاصل ہوتا ہے

$$(3-4) \text{ لوک } 6 + (5+4) \text{ لوک } 8 = \text{لوک } 8$$

$$: (3-4) \text{ لوک } 6 + (3 \text{ لوک } 2 + 3 \text{ لوک } 2) + (5+4) \text{ لوک } 2 = 3 \text{ لوک } 2$$

$$: لا (3-4) \text{ لوک } 6 - 3 \text{ لوک } 2 = 3 \text{ لوک } 2 - 3 \text{ لوک } 2$$

$$- 3 \text{ لوک } 2 - 3 \text{ لوک } 2$$

$$\therefore \frac{10 \text{ لوک } 2 + 3 \text{ لوک } 3}{2 \text{ لوک } 2 + 3 \text{ لوک } 3}$$

$$1544 \dots \dots \dots = \frac{154414439}{1541.0402} =$$

امثلہ نمبری ۱۶ اب

۱۔ مفصلہ ذیل لوگ تہنوں کے ممیز صرف دیکھنے سے ہی دریافت کرو۔

5A6D'SAL'SP'S.35'PO.'PFSM'PICKPO

۴۔ لوک ۶۲۳ کا اعشاریہ لوکارتی ۸۸۲۱۲۵۹ ہے۔

مفصلہ ذیل اعداد کے لوکار تم لکھو۔

$s \dots \angle y_2 s' \angle q_2 s \dots s' \dots \angle y_2 s' \angle y_2 s' s' \angle s y_2 s$

۳۔ جن عددوں کے لیے کارتم بالترتیب ۳۔۱۰، ۳۔۳، ۳۔۱۲، ۳۔۱۷، ۳۔۱۸

۹۷، ۲۹، ۳، ۱۵، ۶۵، ۵ پر اُن کے اصحیح حصوں میں ہندسوں کی تعداد

دریافت کرو۔

۴۔ جن عددوں کے لوکارتم ۱۵۱۳۷۷۲ و ۸۱۵۰۶۹۱ و

۱۳۸۴ء میں ان کے پہلے ملحقہ مندرجہ کے مقام پر ریافت کرو۔

معلوم ہے کہ لوک ۲ = ... ۱۰۔ ۳۰، ۴۰، ۵۰، ۶۰، ۷۰، ۸۰، ۹۰، ۱۰۰، ۱۱۰، ۱۲۰، ۱۳۰، ۱۴۰، ۱۵۰

اور لوگ ہے۔ ۸۰۹۵۰۸

منفصلہ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو۔

۵۔ لوک نم ۶ - ۶۔ لوک نم ۷ - ۷۔ لوک نم ۸

۸۔ لوک ۱۲۵ ۹۔ لوک ۴۴۴ ۱۰۔ لوک ۳۴۲

۱۱۔ نوک $\sqrt[3]{12}$ ۱۲۔ نوک $\sqrt[3]{\frac{35}{24}}$ ۱۳۔ نوک $\sqrt[3]{2.105}$

۱۴- ۳۴۴. س. کا ساتواں جلد دریافت کرو۔

معلوم ہے کہ لوک $۹۳۸۸ = ۴۴۰۹۳۸۸ = ۴۴۰۹۳۸۸ = ۴۴۰۹۳۸۸$

۱۵۔ معلوم ہے کہ لوک $۱۹۴۸۴۴۵ = ۱۹۴۸۴۴۵ = ۱۹۴۸۴۴۵ = ۱۹۴۸۴۴۵$ کا گیارہواں جذر دریافت کرو۔

۱۶۔ ۳۴۵۲۰۳ ، ۳۴۵۲۰۳ ، ۳۴۵۲۰۳ اور ۳۴۵۲۰۳ کا حاصل ضرب دریافت کرو۔

معلوم ہے کہ لوک $۳۴۵۲۰۳ = ۳۴۵۲۰۳ = ۳۴۵۲۰۳ = ۳۴۵۲۰۳$

اور لوک $۱۹۱۵۶۳۱۲۰ = ۱۹۱۵۶۳۱۲۰ = ۱۹۱۵۶۳۱۲۰ = ۱۹۱۵۶۳۱۲۰$

۱۷۔ لوک ۱۲ اور لوک ۳ معلوم ہیں۔

لوک $\left(\frac{۳}{۲} \times \frac{۵}{۲} \right)$ دریافت کرو

۱۸۔ لوک ۲ اور لوک ۳ معلوم ہیں۔

لوک $(۴۸ \times ۱۰۸ \div ۶)$ دریافت کرو۔

۱۹۔ $\left(\frac{۱۲۵ \times ۲۹۲}{۳۲ \times ۴۲} \right)^۲$ کی قیمت اعشاریہ کے چھ مقام تک

دریافت کرو۔

معلوم ہیں لوک ۲، لوک ۳، لوک ۴،

اور لوک $۳۴۵۲۰۳ = ۳۴۵۲۰۳ = ۳۴۵۲۰۳ = ۳۴۵۲۰۳$

۲۰۔ $(۳۳۰ \div ۴۹)$ کی قیمت اعشاریہ کے

چھ مقام تک دریافت کرو۔

معلوم ہیں لوک ۲، لوک ۳، لوک ۴، نیز لوک ۱۱

اور لوک $۱۴۸۱۵۱۴ = ۱۴۸۱۵۱۴ = ۱۴۸۱۵۱۴ = ۱۴۸۱۵۱۴$

۲۱۔ عدد ۲×۲ میں ہندسوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۲۔ ثابت کرو کہ $\left(\frac{۴}{۳} \right)^۲$ بڑا ہے ۱۰۰ سے۔

۳۳۔ عدد $\frac{1}{10}$ میں علامت اعشاریہ اور پہلے ملحوظات سے کے درمیان
 صفروں کی تعداد دریافت کرو۔
 مفصلہ ذیل مساواتوں کو حل کرو معلوم ہیں لوک ۲، لوک ۳ اور لوک ۷

$$10 = \frac{u}{2} \quad -25$$

$$5 = \frac{2-u}{3} \quad -27$$

$$\frac{u}{5} \times \frac{1+u}{2} = \frac{u}{21} \quad -26$$

$$\frac{2+u}{2} = \frac{u-5}{5} \quad -24$$

$$\frac{u-1}{2} \times \frac{u}{5} = \frac{2-u}{4} \times \frac{u}{3} \quad -28$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} = \frac{1+u}{2} \quad -29 \\ \frac{1+u}{2} \times 3 = \frac{u}{3} \end{array} \right.$$

$$6-u = 1-u-1 \quad -30$$

$$\frac{1-u}{3} = \frac{1-u}{3} \quad -31$$

۳۱۔ معلوم ہے کہ لوک ۲ = ۱۰۳، ۳ = ۱۰۳، ۷ = ۲۰۰ دریافت کرو۔

۳۲۔ معلوم ہے کہ لوک ۲ = ۱۰۳، ۳ = ۱۰۳، ۷ = ۲۰۰ اور لوک ۷ = ۲۸۵۰۹

لوک ۲ اور لوک ۷ دریافت کرو۔

باب ہفتم

قوت نمائی اور لوکارتمی سلسلے

۲۲۳۔ گزشتہ باب میں ہم نے یہ ذکر کیا تھا کہ مروج لوکارتم براہ راست نہیں نکالے جاتے لیکن پہلے وہ ایک خاص اساس پر نکالے جاتے ہیں اور اس کے بعد اساس دس میں منتقل کر دیے جاتے ہیں۔

اس باب میں ہم چند قوانین جبریہ جن کو قوت نمائی اور لوکارتمی سلسلے کہتے ہیں، ثابت کریں گے اور مختصر طور پر یہ بیان کریں گے کہ ان کی مدد سے لوکارتمی حدود میں کس طرح مرتب ہوتی ہیں۔

۲۲۴۔ لا کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ۔

اگر ن ایک سے بڑا ہو تو مسئلہ شنائی کی مدد سے

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + n \times \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{n^2} + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \times \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

لا = ارکھنے سے

$$(۱ + \frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})}{3} + (۲) \dots$$

$$\text{لیکن } (1 + \frac{1}{n})^n = \{ (1 + \frac{1}{n})^n \}$$

اس لیے معلوم ہوا کہ سلسلہ (۱) سلسلہ (۲) کی لاویں قوت ہے، یعنی

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{(1 - 1/n)(1 - 2/n)}{3} + \dots$$

$$= \{ 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{(1 - 1/n)(1 - 2/n)}{3} + \dots \}$$

اور یہ درست ہے خواہ n کی قیمت کتنی بھی بڑی ہو، اس لیے اگر n کو لانا،
بڑھایا جائے تو

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$$

$$= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots)$$

ہم سلسلہ $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots$ کو قوت نما کے پہلے
دو حرف ”قو“ یا اختصار کی خاطر نقطے گرا کر ”و“ سے تعبیر کریں گے۔

$$\text{اس لیے } 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots$$

لا کی جگہ ج لا لکھنے سے

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots$$

اب فرض کرو کہ $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots$ اس لیے ج = لوک پو، اوپر کے سلسلے میں ج
کی قیمت رکھنے سے

$$1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

اس کو مسئلہ قوت نما کہتے ہیں۔

نتیجہ صریح۔ جب n لا انتہا بڑا ہو تو ہمارا $(1 + \frac{1}{n})^n = e$ نیز جیسے اوپر عمل ہوا ہے اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر n کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

یعنی جب n لا انتہا ہی ہو تو ہمارا $(1 + \frac{1}{n})^n = e$

اگر $\frac{1}{n}$ کی جگہ $(1 - \frac{1}{m})$ رکھا جائے تو

$$(1 - \frac{1}{m})^m = (1 + \frac{1}{m})^{-m} = [(1 + \frac{1}{m})^m]^{-1}$$

اب اگر n مائل بہ لا انتہا ہی ہو تو m بھی مائل بہ لا انتہا ہی ہوتا ہے۔

پس ہمارا $(1 - \frac{1}{n})^n = e^{-1}$

اس لیے ہمارا $(1 - \frac{1}{n})^n = e^{-1}$

۲۲۵۔ دفعہ گزشتہ میں لا کی قیمت پر کوئی قید نہیں رکھی گئی۔

نیز چونکہ $\frac{1}{n}$ اکائی سے کم ہے اس لیے جو تفصیلی صورتیں ہم نے اوپر

استعمال کی ہیں اور ان سے جو نتائج اخذ کیے ہیں وہ بلحاظ حسابی

قیمت کے درست اور بامعنی ہیں۔

لیکن اوپر دیے ہوئے ثبوت میں ایک بات قابل غور ہے۔

ہم نے یہ مان لیا ہے کہ جب n مائل بہ لائنہا ہی ہوتا ہے

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$
 کی انتہا ر کی تمام قیمتوں

کے لیے $\frac{1}{n}$ ہے۔

اگر
$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$
 کو صبر سے تعبیر کریں تو

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

چونکہ n لائنہا ہی ہے، اس لیے $\frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$ یعنی صبر = $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1}$

ظاہر ہے کہ صبر کی انتہا $\frac{1}{n}$ ہے، اس لیے صبر کی انتہا $\frac{1}{n}$ ہے اور
 صبر کی $\frac{1}{n}$ اور بالعموم صبر کی $\frac{1}{n}$

۲۲۶۔ لاکھ تمام محدود قیمتوں کے لیے وہ کی صورت تفصیلی مستحق
 ہے، اگر صبر سے n ویں رقم تعبیر کی جاوے تو

$$\frac{1}{n} = \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \text{نہیں} \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

اس لیے معلوم ہوا کہ سلسلہ زیر بحث مستحق ہے۔

۲۲۷۔ جو لائنہا ہی سلسلہ وہ سے تعبیر ہوتا ہے وہ مستحق ہے اور
 اس کی قیمت کا اندازہ اعشاریہ کے چند مقام تک باسانی ہو سکتا ہے۔ یہ
 حساب لگانا آسان ہے کیونکہ $(n+1)$ ویں رقم n ویں رقم کو n پر تقسیم

کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

۱	=	پہلی رقم
۱	=	دوسری رقم
۰.۵	= ۲ ÷	تیسری رقم = دوسری رقم ÷ ۲
۰.۵۱۶۶۶۶۶۶.....	= ۳ ÷	چوتھی رقم = تیسری رقم ÷ ۳
۰.۵۰۴۱۶۶۶۶.....	= ۴ ÷	پانچویں رقم = چوتھی رقم ÷ ۴
۰.۵۰۰۸۳۳۳۳.....	= ۵ ÷	چھٹی رقم = پانچویں رقم ÷ ۵
۰.۵۰۰۱۳۸۸۸.....	= ۶ ÷	ساتویں رقم = چھٹی رقم ÷ ۶
۰.۵۰۰۰۱۹۸۸.....	= ۷ ÷	آٹھویں رقم = ساتویں رقم ÷ ۷
۰.۵۰۰۰۰۲۸۸.....	= ۸ ÷	نویں رقم = آٹھویں رقم ÷ ۸
۰.۵۰۰۰۰۰۲۸.....	= ۹ ÷	دسویں رقم = نویں رقم ÷ ۹
۰.۵۰۰۰۰۰۰۳.....	= ۱۰ ÷	گیارہویں رقم = دسویں رقم ÷ ۱۰
۰.۵۰۰۰۰۰۰۰۲۸.....	= ۱۱ ÷	اس لیے جمع کرنے سے

مقدار مو بڑی کار آمد ہے کیونکہ سب سے اول اس اساس پر تمام عددوں کے لوکارتم محسوب کیے جاتے ہیں اور اس کے بعد یہ لوکارتم مروج لوکارتموں میں تبدیل ہو سکتے ہیں۔ جو لوکارتم اساس مو پر نکالے جائیں ان کو نیپیری لوکارتم کہتے ہیں کیونکہ ان کو نیپیر نے ایجاد کیا تھا۔ نیز ان کو طبعی لوکارتم بھی کہتے ہیں کیونکہ تحقیقات جبریہ میں سب سے اول اسی قسم کے لوکارتموں پر غور کیا جاتا ہے۔

آئندہ یاد رہے کہ جب لوکارتم نظریات میں استعمال کیے جائیں تو ہمیشہ اساس مو محذوف ہوتا ہے، اسی طرح عملی حسابات میں ہمیشہ اساس ۱۰ استعمال کرتے ہیں

$$\text{مثال ۱۔} \quad 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

کا مجموعہ دریافت کرو۔

$$\text{ہمیں معلوم ہے کہ } 1 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

اور قوا کی صورت تفصیلی میں لا کو۔ ا کے مساوی رکھنے سے

$$قوا = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$$

اس لیے قوا + قوا = $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

اس لیے دیے ہوئے سلسلہ کا مجموعہ = $\frac{1}{2} (قوا + قوا)$

مثال ۴۔ $\frac{1 - لا - لا - لا}{قوا}$ کی صورت تفصیلی میں لا کا سر دریافت کرو

$$\frac{1 - لا - لا - لا}{قوا} = (1 - لا - لا - لا) قوا$$

$$= (1 - لا - لا - لا) \left\{ 1 - \frac{لا}{2} + \frac{لا^2}{4} - \frac{لا^3}{8} + \dots \right\} =$$

$$\frac{(1 - لا)^2}{2 - لا} - \frac{(1 - لا)^2}{4 - لا} + \frac{(1 - لا)^2}{8 - لا} - \dots$$

$$= \frac{(1 - لا)^2}{2 - لا} \left\{ 1 - \frac{لا}{2} + \frac{لا^2}{4} - \dots \right\}$$

۲۲۸۔ لوک پ (لا + لا) کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ۔ بموجب

دفعہ ۲۲۴

$$1 = 1 + \frac{لا}{2} + \frac{لا^2}{4} + \frac{لا^3}{8} + \dots$$

اس سلسلہ میں لا کی جگہ لا + لا رکھنے سے

$$(لا + لا) = 1 + \frac{لا}{2} + \frac{لا^2}{4} + \frac{لا^3}{8} + \dots$$

$$+ \frac{لا}{2} + \frac{لا^2}{4} + \frac{لا^3}{8} + \dots$$

نیز مسئلہ ثنائی کی مدد سے اگر $\lambda > 1$ تو

$$(1 + \lambda) = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6} + \frac{\lambda^4}{24} + \dots \quad (2)$$

اب (۲) میں λ کا سر ہے۔

$$\dots + \frac{\lambda^2}{2 \times 1} + \frac{\lambda^3}{3 \times 2 \times 1} + \frac{\lambda^4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \dots$$

یعنی $\lambda - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} - \frac{\lambda^4}{4} + \dots$

اس کو مساوات (۱) میں جو λ کا سر ہے اس کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{لوکارتمی سلسلہ} \quad (1 + \lambda) = \lambda - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} - \frac{\lambda^4}{4} + \dots \quad (3)$$

اس کو لوکارتمی سلسلہ کہتے ہیں

$$\left| \frac{1 - \lambda}{\lambda} \right| = \left| \frac{\text{صحیح}}{\text{صحیح}} \right|$$

$$\left| \frac{1 - \lambda}{\lambda} \right| = \left| \frac{\text{صحیح}}{\text{صحیح}} \right|$$

اس لیے اگر λ بلحاظ عددی قیمت کے اکائی سے کم ہو تو سلسلہ مستقر ہوگا۔

اگر $\lambda = 1$ تو سلسلہ کی صورت ہوگی

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

اور یہ سلسلہ مستقر ہے۔

اگر $\lambda = -1$ تو سلسلہ کی صورت ہوگی۔

- ۱ - $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{4}$ -
اور یہ سلسلہ غیر مستقیم ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ صفر کا لوکارتم منفی لاتنا ہی
ہوتا ہے اور یہی نتیجہ مساوات $\infty = 0$ سے بھی ظاہر ہے۔

مثال - اگر $\frac{1}{2} > 1$ تو $\{ \text{لوکارتم } (1 + \frac{1}{2}) \}$ کو لا کی صعودی قوتوں

میں پھیلاؤ۔
مندرجہ بالا نتائج (۱) اور (۲) میں ہمارے سروں کو باہم مساوی رکھنے
سے ہم دیکھتے ہیں کہ مطلوبہ صورت تفصیلی

$$\text{جملہ } \frac{1}{2} \times \frac{(1-1)}{1} + \frac{1}{3} \times \frac{(1-1)(2-1)}{1 \times 2} + \frac{1}{4} \times \frac{(1-1)(2-1)(3-1)}{1 \times 2 \times 3} + \dots$$

میں ہمارے سروں کی دو چند ہے۔

$$\text{یعنی جملہ } \frac{1}{2} \times \frac{(1-1)}{1} + \frac{1}{3} \times \frac{(1-1)(2-1)}{1 \times 2} + \frac{1}{4} \times \frac{(1-1)(2-1)(3-1)}{1 \times 2 \times 3} + \dots$$

میں ہمارے سروں کی دو چند ہے۔

$$\left\{ \text{لوکارتم } (1 + \frac{1}{2}) \right\} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{256} + \dots \right\}$$

۲۲۹ - سوائے اُس صورت کے جبکہ لا بہت چھوٹا ہے
لوکارتم $(1 + \frac{1}{2})$ کی صورت تفصیلی عمل حسابات میں مفید ثابت نہیں
ہوتی لیکن اس سے اور سلسلے حاصل ہوتے ہیں جن کی مدد سے
لوکارتمی جدولیں آسانی مرتب ہو سکتی ہیں۔

لا کی جگہ $\frac{1}{n}$ لکھنے سے ہیں لوکارتم $\frac{1}{n} + 1$ کی صورت تفصیلی

حاصل ہوتی ہے، اس لیے

لوک (ن + ۱) - لوک (ن) = $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots$ (۱)
 لاکہ جگہ (- $\frac{1}{n}$) لکھنے سے ہیں لوک (ن) - $\frac{1}{n}$ حاصل ہوگا، اس لیے
 مساوات کے دونوں طرف علامات بدل دینے سے

لوک (ن) - لوک (ن - ۱) = $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots$ (۲)
 (۱) اور (۲) کو جمع کرنے سے

لوک (ن + ۱) - لوک (ن - ۱) = $2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots \right)$ (۳)
 مساوات (۳) میں فرض کرو کہ $n = 3$ ، اس طرح سے حاصل ہوگا
 لوک ۴ - لوک ۲ یعنی لوک ۲ اور حساب لگانے سے معلوم ہوگا
 کہ لوک ۲ = $25931418 \dots$ جس سے لوک ۸ معلوم ہو سکتا ہے۔
 نیز فرض کرو کہ $n = 9$ ، یہیں حاصل ہوگا لوک ۱۰ - لوک ۸ جس سے
 لوک ۱۰ = $2530258509 \dots$

نیپیری لوکارتوں کو عشری لوکارتوں میں منتقل کرنے کے لیے

ہیں اول الذکر کو $\frac{1}{10}$ سے ضرب دینی پڑتی ہے، لوک ۱۰ مروج
 لوکارتہم کا مقیاس کہلاتا ہے اور اس کی قیمت

یا $\frac{1}{2530258509 \dots}$ ہے ہم اس مقیاس کو

”مہ“ سے تعبیر کریں گے۔

۲۴۔ اگر ہم مندرجہ بالا سلسلوں کو مہ سے ضرب دیں تو ہمیں ایسے ضابطے حاصل ہونگے جو مروج لوکارتموں کے حساب لگانے میں موذوں ثابت ہوتے ہیں۔
مثلاً (۱) سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{مہ لوک (ن + ۱)۔ مہ لوک (ن) = } \frac{\text{مہ}}{\text{ن}} - \frac{\text{مہ}}{\text{ن}+۱} + \frac{\text{مہ}}{\text{ن}+۲} - \dots$$

$$\text{یعنی لوک (ن + ۱)۔ لوک (ن) = } \frac{\text{مہ}}{\text{ن}} - \frac{\text{مہ}}{\text{ن}+۱} + \frac{\text{مہ}}{\text{ن}+۲} - \dots (۱)$$

اسی طرح (۲) سے

$$\text{لوک (ن)۔ لوک (ن - ۱) = } \frac{\text{مہ}}{\text{ن}} + \frac{\text{مہ}}{\text{ن}+۱} + \frac{\text{مہ}}{\text{ن}+۲} + \dots (۲)$$

اوپر کے نتائج سے ظاہر ہے کہ اگر دو متصل اعداد میں سے کسی ایک کا لوکارتم معلوم ہو تو دوسرے کا لوکارتم معلوم ہو سکتا ہے اور اس طرح سے ایک لوکارتمی جدول مرتب ہو سکتی ہے۔

ظاہر ہے کہ اوپر کے قوانین کی ضرورت صرف منفرد اعداد کے لوکارتم نکالنے میں پڑتی ہے کیونکہ مرکب اعداد کے لوکارتم ان کے اجزائے ضربی کے لوکارتموں کو جمع کرنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

اگر کسی چھوٹے عدد منفرد کا لوکارتم نکالنا منظور ہو تو ہم براہ راست اس عدد کو ضابطہ (۱) یا (۲) میں نہیں درج کروینا چاہیے بلکہ ان کی ایک ایسی قیمت معلوم کرنے کی کوشش کرنی چاہیے جس سے عمل تقسیم میں آسانی ہو اور علاوہ اس کے وہ قیمت ایسی ہو کہ وہ عدد منفرد بطور جزو ضربی کے $\text{ن} + ۱$ یا $\text{ن} - ۱$ میں شامل ہو، اس طرح سے ہم لوک (ن + ۱) یا لوک (ن - ۱) دریافت کر سکتے ہیں اور اس سے دیے ہوئے عدد کا لوکارتم حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال - معلوم ہے کہ $2^8 = 256$ اور $2^9 = 512$ اور $2^{10} = 1024$ معلوم کرو۔

۱۱۰ = ۱۱۰ اس سے ہیں لوک ۱۰۔ لوک ۹
کی قیمت حاصل ہوگی پس

۱-۲ لوک ۳ = ۵۰۴۳۴۲۹۴۴۸ + ۵۰۲۱۷۱۴۷۲

$$S \dots 1.006 + S \dots 1.00640 +$$

$$5, \dots, 62 + 5, \dots, 878 +$$

5.....9+

3-1-2 کوک = 3

لوک ۳ = ۶۱۲۱۲۵۶

(۱) میں رکھوں = ۸۰ تو حاصل ہوگا لوک — ۸۱ — لوک . ۸۰ پس

۴ لوک ۳ - ۳ لوک ۲ - ۱ = ۵۴۲۸۶۸۱ - ۳۳۹۲۹ = ۵۰۰۰۰

$$5 \dots \dots \dots 4 - 5 \dots \dots \dots 2 \wedge 3 +$$

$\dots 3 - 5 \dots \dots 284 +$
 $5 \dots 5395 \dots 32 - 59 \dots 8485 \dots 22 = 2$ لوک 2

لوک ۲ = ۳۰۱۰۲۹۹۹۶

انگل دفعہ میں لوک (ن + ۱)۔ لوک ن کے لیے ہم ایک اور سلسلہ دریافت کرینگے جو لوکار متی جدوہوں کے مرتب کرنے میں اکثر مفید ثابت ہوتا ہے۔

۲۳۱۔ - دفعہ ۲۲۸ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ

لوک (1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots

لاکو (- لا) میں تبدیل کرنے سے

لوک (۱-۷) = ۷ - $\frac{۷}{۲}$ - $\frac{۷}{۳}$ - $\frac{۷}{۴}$ - -

عمل تفریق سے

$$\text{لوک} = \frac{1 + لا}{لا - ۱} = ۲ (لا + \frac{لا^۲}{۳} + \frac{لا^۵}{۵} + \dots)$$

$$\text{فرض کر دو کہ } \frac{1 + لا}{لا - ۱} = \frac{ن + ۱}{ن} \text{ جس سے لا} = \frac{۱}{۱ + ن^۲}$$

پس حاصل ہوگا

لوک (ن + ۱) - لوک ن = $\left\{ \frac{۱}{۱ + ن^۲} + \frac{۱}{۳(۱ + ن^۲)^۳} + \frac{۱}{۵(۱ + ن^۲)^۵} + \dots \right\}$
 نوٹ - اس سلسلہ کی رقموں کی عددی قیمت بڑی سرعت سے ٹھٹھتی
 ہے، لیکن عملی حسابات میں دفعہ ۲۲۹ کے سلسلے زیادہ مفید ثابت
 ہوتے ہیں۔

۲۳۲ - مندرجہ ذیل مثالیں اس باب کے مضمون کی توضیح
 کے لیے دی گئی ہیں۔

$$\text{مثال ۱ - سلسلہ ۱ - } \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۹} + \dots$$

کا مجموعہ دریافت کرو۔

ظاہر ہے کہ ہر لا کی صورت تفصیلی میں لا = $\frac{۱}{۳}$ درج کرنے سے
 دیا ہوا سلسلہ حاصل ہوتا ہے، اس لیے دیے ہوئے سلسلہ کا مجموعہ = قوت

مثال ۲ - ایک لامتناہی سلسلہ کی ن ویں رقم $\frac{ن^۳}{ن}$ ہے اس کا

مجموعہ دریافت کرو۔

$$ن ویں رقم = \frac{ن^۳}{ن} = \frac{ن^۲}{۱ - ن} = \frac{۱}{۱ - ن} + \frac{ن^۲}{۱ - ن}$$

$$\frac{1}{1-n} + \frac{n}{2-n} = \frac{1}{1-n} + \frac{n}{2-n}$$

$$\frac{1}{1-n} + \frac{n}{2-n} + \frac{n^2}{3-n} =$$

$$\frac{1}{1-n} + \frac{n}{2-n} + \frac{n^2}{3-n} = \text{(ن-۱) ویں رقم}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{3} = \text{چوتھی رقم}$$

$$1 + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{3} = \text{تیسری رقم}$$

$$3 + \frac{n}{2} = \text{دوسری رقم}$$

$$1 = \text{پہلی رقم}$$

عمودی سطروں کو جمع کرنے اور ن کو لا انتہا بڑھانے سے سلسلہ

$$= 1 + 3 + 5 + \dots$$

مثال ۳۔ اگر عہ اور ب مساوات ل + ب + ج = ۰ کی
اصلیں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{لوک (ل + ب + ج ل)} = \text{لوک ل} + \text{عہ (ب + ل)} - \frac{\text{عہ}^2}{2} + \frac{\text{ب}^2}{2} + \frac{\text{ج}^2}{2}$$

$$\text{چونکہ: عہ + ب = ۰، عہ = -ب، اس لیے}$$

$$\text{لوک ل + ب ل + ج ل} = \text{لوک ل} + \text{عہ (ب + ل)} + \frac{\text{ب}^2}{2} + \frac{\text{ج}^2}{2} = \text{لوک ل} + \text{عہ ل} + \text{ب ل} + \frac{\text{ب}^2}{2} + \frac{\text{ج}^2}{2}$$

$$\text{لوک ل} + \text{ب ل + ج ل} = \text{لوک ل} + \text{عہ ل} + \text{ب ل} + \frac{\text{ب}^2}{2} + \frac{\text{ج}^2}{2} = \text{لوک ل} + \text{عہ ل} + \text{ب ل} + \frac{\text{ب}^2}{2} + \frac{\text{ج}^2}{2}$$

$$= \text{لوک ۱} + \text{عہ لا} - \frac{\text{عہ لا}^2}{2} + \frac{\text{عہ لا}^3}{3} - \dots + \text{بہ لا} - \frac{\text{بہ لا}^2}{2} + \frac{\text{بہ لا}^3}{3} - \dots$$

$$= \text{لوک ۱} + (\text{عہ} + \text{بہ}) \text{لا} - \frac{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2}{2} \text{لا} + \frac{\text{عہ}^3 + \text{بہ}^3}{3} \text{لا} - \dots$$

مثال ۴ - ثابت کرو کہ لوک (۱ + لا + لا²) کی صورت تفصیلی

میں لا کا سر (۱ - ۱/ن) یا ۱/ن ہے بموجب اس کے کہ ن تین کا ضعف

ہے یا نہیں۔

$$\text{لوک (۱ + لا + لا}^2) = \text{لوک ۱} - \frac{\text{لا}^3}{3} = \text{لوک (۱ - لا}^3) = \text{لوک (۱ - لا)} \quad (\text{لا} = ۱)$$

$$= \text{لا} - \frac{\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{لا}^3}{3} - \dots - \frac{\text{لا}^3}{3}$$

$$+ (\text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{3} + \dots + \frac{\text{لا}^3}{3})$$

اگر ن تین کا ضعف ہو تو اس کو ۳ ر سے تعبیر کرو، اس صورت میں

پہلے سلسلے سے لا کا سر (۱ - ۱/۳) ہو گا اور دوسرے سلسلے سے

$$\frac{۱}{۳} \text{ یعنی سر مطلوب} - \frac{۳}{ن} + \frac{۱}{ن} \text{ یعنی} - \frac{۲}{ن} \text{ ہو گا۔}$$

اگر ن تین کا ضعف نہ ہو تو پہلے سلسلے میں لا کا واقع نہیں ہو گا

اس لیے اس صورت میں سر مطلوب ۱/ن ہو گا۔

۳۴۳ - ثابت کرو کہ مقدار متبائن ہے۔

اگر متبائن نہ ہو تو فرض کرو کہ ۱/ن جہاں م اور ن مثبت

صحیح عدد ہیں۔

تب $\frac{1}{n} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots$
 طرفین کو n میں ضرب دینے سے

م $\frac{n}{n} = 1 + \text{ایک صحیح عدد} + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{(1+n)(2+n)} + \dots + \frac{1}{(1+n)(2+n)(3+n)} + \dots$

لیکن $\frac{n}{n} = 1 + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{(1+n)(2+n)} + \frac{1}{(1+n)(2+n)(3+n)} + \dots$
 ایک کسر واجب ہے کیونکہ یہ $\frac{1}{1+n}$ سے بڑی ہے اور سلسلہ ہندسہ

$\frac{1}{1+n} + \frac{1}{(1+n)^2} + \frac{1}{(1+n)^3} + \dots$
 یعنی $\frac{1}{n}$ سے چھوٹی ہے، اس لیے ایک صحیح عدد ایک صحیح اور کسر
 کے حاصل جمع کے برابر ہوا جو کہ باطل ہے۔ پس معلوم ہوا کہ
 مقدار متبائن ہے۔

امثلہ نمبری ۱۷

۱۔ ثابت کرو کہ $\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right\} - \left\{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n}\right\} = 1$

۲۔ سلسلہ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ کی قیمت دریافت کرو۔

۳۔ $\frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{2 \times 4} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 2} - \frac{1}{2} = \dots$ کی قیمت دریافت کرو۔
 ۴۔ ثابت کرو کہ

لوک (ن + ۱) - لوک (ن - ۱) = $\left(\frac{1}{ن} + \frac{1}{ن+۱} + \frac{1}{ن+۲} + \dots \right) ۲$
 ۵۔ اگر $\frac{1}{۲} - \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} - \frac{1}{۵} + \dots$
 تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \dots$

۶۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} + \dots = \frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} + \dots$
 = لوک ایک سو ب

۷۔ اعشاریہ کے ۶ مقام تک $\frac{1}{۹۹۹}$ کا نیپیری لوکار رقم دریافت کرو۔

۸۔ ثابت کرو کہ $\left(\frac{1}{۳} + \frac{1}{۵} + \frac{1}{۷} + \dots \right) ۲ = ۱$

۹۔ ثابت کرو کہ

لوک $(۱ + ل) (۱ - ل) = ۱ - ل^۲$
 $\left(\frac{1}{۲ \times ۱} + \frac{1}{۴ \times ۳} + \frac{1}{۶ \times ۵} + \dots \right) ۲ = ۱ - ل^۲$

۱۰۔ $\frac{1}{۲} - \frac{1}{۴} + \frac{1}{۶} - \frac{1}{۸} + \dots$ کی قیمت دریافت کرو۔

۱۱۔ ۱۱، ۱۳ کے مروج لوکار رقموں کی عددی قیمتیں دریافت کرو۔

معلوم ہے کہ ۸۴۸۴۹۴۳۱۵ اور لوک $۲ = ۳۰۱۰۳۰۰۰$

۱۲۔ ثابت کرو کہ اگر $\frac{1}{۲}$ اور $\frac{1}{۳}$ دونوں ایک سے کم ہوں تو

$$1 - (1 + \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) - (\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) + \dots$$

$$= \text{لوک} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots)$$

$$13 - \text{ثابت کرو کہ لوک} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

اور سلسلہ کی رقم عامہ دریافت کرو۔

$$14 - \text{ثابت کرو کہ}$$

$$\text{لوک} \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

اور سلسلہ کی رقم عامہ دریافت کرو۔

$$15 - \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \text{ کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ۔}$$

$$16 - \frac{1}{2} (x + \frac{1}{x}) \text{ کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ۔}$$

$$\text{جہاں } x = \frac{1}{1-x}$$

$$16 - \text{ثابت کرو کہ}$$

$$\text{لوک} (1 + \frac{1}{2}) = 2 \text{ لوک} (1 + \frac{1}{3}) - \text{لوک} (1 + \frac{1}{4})$$

$$\left\{ \dots + \frac{1}{(1+\frac{1}{2})^3} + \frac{1}{(1+\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{(1+\frac{1}{2})} \right\} -$$

$$18 - \text{ثابت کرو کہ } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{2}$$

$$19 - \text{ثابت کرو کہ } \frac{1}{2} \text{ لوک} (1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{3} \frac{(1-n)}{(1+n)} + \frac{1}{5} \frac{(1-n)}{(1+n)} + \dots$$

$$+ \frac{1}{7} \frac{(1-n)}{(1+n)} + \dots$$

۲۰۔ ثابت کرو کہ متصلہ صحیح اعداد کے لوکارتوں کا فرق متواتر

کم ہوتا ہے۔
۲۱۔ ثابت کرو کہ لوک (ن + ۱) + لوک (ن - ۱) - ۲ لوک ن

$$= \left\{ \frac{1}{1 - 2^n} + \frac{1}{3 - 2^{n-1}} + \frac{1}{5 - 2^{n-2}} + \dots \right\}$$

۲۲۔ اگر ع اور ب مساوات لا - ف لا + ق = کی اصلیں ہوں تو
ثابت کرو کہ

$$\text{لوک } (1 + ف لا + ق لا) = (ع + ب) لا - \frac{ع^2 + ب^2}{2} لا$$

$$+ \frac{ع^3 + ب^3}{3} لا - \dots$$

$$۲۳۔ اگر لا > 1 \text{ تو سلسلہ } \frac{1}{2} لا + \frac{2}{3} لا + \frac{3}{4} لا + \dots$$

کا مجموعہ دریافت کرو۔
۲۴۔ ثابت کرو کہ

$$\text{لوک } \left(\frac{1}{n} + 1 \right) = \frac{1}{2(1+n)} - \frac{1}{3 \times 2(1+n)} + \frac{1}{4 \times 3(1+n)} - \dots$$

۲۵۔ اگر لوک $\frac{1}{1 + لا + لا^2 + لا^3}$ کو ایک ایسے سلسلہ میں پھیلا یا جائے

جس میں لا کی قوتیں بتدریج بڑھتی ہیں، تو ثابت کرو کہ لا کا سر $\frac{1}{2}$ ہوگا
اگر ن کی صورت ۴ م + ۲ ہو یا ن طاق عدد ہو اور لا کا سر $\frac{3}{4}$ ہو گا

اگر ن کی صورت ۴ م ہو
۲۶۔ ثابت کرو کہ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = 5$$

۲۷۔ ثابت کرو کہ

$$۲ \text{ لوگ } n - \text{لوگ } (n+1) - \text{لوگ } (n-1) =$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$۲۸۔ \text{ ثابت کرو کہ } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \dots$$

$$۲۹۔ \text{ اگر لوگ } \frac{9}{10} = - \text{ لوگ } \frac{24}{25} = - \text{ ب اور لوگ } \frac{81}{80} = \text{ ج}$$

تو ثابت کرو کہ

$$\text{لوگ } ۲ = ۱۷ - ۲ - ۳ + \text{ج}$$

$$\text{لوگ } ۳ = ۱۱ - ۳ - ۵ + \text{ج}$$

$$\text{لوگ } ۵ = ۱۶ - ۴ - ۷ + \text{ج}$$

اور لوگ ۲، لوگ ۳، لوگ ۵ کی قیمتیں اعشاریہ کے ۸ مقام تک

محسوب کرو۔

شَّمْس

امثالہ نمبری ۱

۱ - (۱) ۴:۵ ب:ل
۲ - ۱۸ - ۳ - ۳۸۵، ۶۶۰ - ۴ - ۱۱
۵ - ۱۴:۵ - ۶ - ۶:۵ - ۷:۳ - ۸
۱۱ - $\frac{۱۱}{۴} = \frac{۶}{۵} = \frac{۳}{۲} = \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱}$
۱۸ - ل ب ج + ۲ ف گ ه - ل ف - ب گ - ج ه = .
۲۱ - ۱، ۳، ۴ - ۲۲ - ۳، ۴، ۱
۲۳ - ۲، ۳، ۴ - ۲۴ - ۳، ۴، ۱
۲۵ - ل (ب - ج) ± ب (ج - ل) ± ج (ل - ب) ± ل (ب - ج)
۲۶ - ب ج (ب - ج) ± ج ل (ج - ل) ± ل ب (ل - ج) ± ب ج (ب - ج)

۱. مثله نمبری ۲

$$1 - \frac{r_1}{(r_1 + r_2)k}$$

- ۱۵ - (دب + ج) $\frac{1}{2}$ - ۱۸ - ۸
- ۱۹ - ۱۵، ۱۰، ۹، ۶ - ۲۰ - ۳ گیلن ۱ سے اور ۸ گیلن ب سے
- ۲۱ - ۴۵ گیلن - ۲۲ - ۱۶ : ۳ - ۲۴ - ۱ = ۴ ب
- ۲۵ - ۶۴ فیصدی تا نابا اور ۳۶ فیصدی جست، ۵ حصے کا نئے کے ساتھ ۳ حصے پیتل کے نیے گئے ہیں -
- ۲۶ - ۶۳ یا ۱۲ منٹ

امثلہ نمبری ۳

- ۱ - $\frac{1}{3}$ - ۲ - ۹ - ۳ - $1\frac{1}{3}$
- ۴ - ۲ - ۶ - ۶۰ - ۹ - ۷۲ = ۶ - $\frac{8}{9}$
- ۱۰ - ۱۵ = ۵ + $\frac{34}{9}$ - ۱۱ - ۴ - ۱۲ - ۱۵ = $\frac{22}{15}$ + $\frac{2}{15}$
- ۱۴ - ۳۶ - ۱۵ - ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰
- ۱۸ - تقریب ۶ دن رہی - چوتھے، پانچویں، چھٹے دن
- ۲۰ - ۱۶، ۲۵ سال - ۲۰۰ روپیہ، ۲۵۰ روپیہ
- ۲۱ - ۱ دن ۱۸ گھنٹہ ۲۸ منٹ
- ۲۲ - لاگت کم سے کم ہوگی جبکہ رفتار ۱۲ میل فی گھنٹہ ہو اور اس صورت میں لاگت فی میل $\frac{3}{4}$ ہوگی اور سفر کی لاگت ۹ پونڈ، ۱۰ شلنگ
- ۶ پینس -

امثلة نمبری ۴ ل

- ۱ - $\frac{1}{2} ۲۴۴$
- ۲ - ۱۵۳
- ۳ - صفر
- ۴ - $\frac{ن(۱-ن)}{۳}$
- ۵ - ۳۰
- ۶ - ۱۸۵
- ۷ - ۵۶۴۵
- ۸ - ۳۶۱۳۲۵
- ۹ - ۵۶۴۵
- ۱۰ - $۱۸۲۰ - ۱۶۸۰$ باب
- ۱۱ - $ن(ن+۱) - ۱$ ن ب
- ۱۲ - $\frac{۲۱}{۲} (۱۱ - ۹)$ ب
- ۱۳ - $\frac{۱}{۴} - \frac{۳}{۴}$ $\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴}$ ۳۹
- ۱۴ - ۱۸ ن
- ۱۵ - $۳۳ - ۳۱$ لا لا
- ۱۶ - $۱ + لا - لا + ۲ + ۲$ لا
- ۱۷ - $۲۱ - ۹$ م
- ۱۸ - $۲۰ - ۱۲$
- ۱۹ - ۵
- ۲۰ - $۲۱ - ۹$ م
- ۲۱ - $۲۲ - ۱۴۰$
- ۲۲ - $۲۳ - ۲۹۵$
- ۲۳ - $۲۴ - ۱۴۰$
- ۲۴ - $۲۵ - ۱۴۰$
- ۲۵ - $\frac{ع(ع+۱)}{۱۲} + ع$ ب
- ۲۶ - $ن(ن+۱) - ۱$ ن

امثلة نمبری ۴ ب

- ۱ - $۱۰ - ۸$
- ۲ - $۸ - ۱۳$
- ۳ - $۲ - ۸$ ۸
- ۴ - رقم اول ۸، تعداد ارقام ۵
- ۵ - رقم اول $\frac{۱}{۳}$ ، تعداد ارقام ۵
- ۶ - قسطن ۱۵ روپيه، ۵۳ روپيه، ۵۵ روپيه
- ۷ - ۲۵
- ۸ - ۱۲
- ۹ - $\frac{ن}{(۱۲ - لا)} (۲ + ن - ۳ - لا)$
- ۱۰ - $ن - ۱۲$ - (ف + ق)

$$\begin{array}{lll}
 ۱۳ - ۹، ۴، ۵، ۳ & ۱۴ - ۸، ۶، ۴، ۲ & ۱۵ - پ + ق - م \\
 ۱۶ - ۱۲، ۱۱، ۱۰ & ۱۶ - ۱، ۲، ۳، ۴ & ۲۰ - ۱۰، پ - ۸ \\
 ۲۱ - ۸ رقیب - سلسلہ ہے $\frac{1}{2}$ ، ۱، ۳، $\frac{1}{2}$ ، ۴ & & \\
 ۲۲ - (۴، ۵، ۳) اور (۶، ۵، ۴) & & ۲۳ - ۶ = (ن + ۱ - ۱)
 \end{array}$$

امثلہ نمبر ۱۵ ا

$$\begin{array}{lll}
 ۱ - \frac{۲۰۵۹}{۱۴۵۸} & ۲ - \frac{۱۲۸۱}{۵۱۲} & ۳ - \frac{۱}{۴} = ۱۹۱ \\
 ۴ - ۶۸۲ & ۵ - \frac{۱۰۹۳}{۴۵} & ۶ - \frac{۱}{۴} = ۱ - \frac{۴}{۵} \\
 ۷ - \frac{۹}{۶} \left\{ \left(\frac{۴}{۳} \right) - ۱ \right\} & ۸ - ۳۴۴ = ۱ + \sqrt{۳} & ۹ - \frac{۱}{۲} = (۲۹۲ - ۲۲۵۸۵) \\
 ۱۰ - \frac{۲۶۳}{۱۹۲} & ۱۱ - \frac{۲}{۳}، ۱، \frac{۳}{۲} & ۱۲ - \frac{۱۴}{۳}، ۸ \\
 ۱۳ - \frac{۴}{۳۲}، \frac{۴}{۲}، ۶ & ۱۴ - \frac{۴۴}{۶۵} & ۱۵ - \frac{۲۴}{۵۸} \\
 ۱۶ - \frac{۱}{۲} & ۱۷ - ۵۹۹۹ & ۱۸ - \frac{(\sqrt{۳} + ۳)۲}{۲} \\
 ۱۹ - ۲۰ (\sqrt{۲۲} + ۴) & ۲۰ - ۲۰ & ۲۱ - ۳۴، ۲۴، ۱۶ \\
 ۲۲ - ۲۲ & ۲۳ - ۲۳ & ۲۴ - ۱۸، ۱۳، ۸ \\
 ۲۵ - ۱۸، ۶، ۲ & ۲۸ - ۱۸، ۶، ۲ &
 \end{array}$$

امثلہ نمبر ۱۵ ب

$$\begin{array}{lll}
 ۱ - \frac{۱}{۲} & ۲ - \frac{۱}{۲} & ۳ - \frac{۱}{۲}
 \end{array}$$

$$۳- \frac{۱+۱}{۱-۱} \quad ۴-۲ \quad ۵-۱ \quad ۶-۵$$

$$۷- \frac{۱}{۱-۱} \quad ۸- \frac{۱}{(۱-۱)(۱-۱)}$$

$$۱۰- ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰، ۶۰، ۷۰، ۸۰، ۹۰، ۱۰۰$$

$$۱۲- \frac{۱(۱-۱)}{۱-۱} + \frac{۱(۱+۱)}{۱-۱}$$

$$۱۳- \frac{۱(۱-۱)}{۱-۱} + \frac{۱(۱+۱)}{۱-۱}$$

$$۱۴- \frac{۱}{۱-۱} + \frac{۱}{۱-۱}$$

$$۱۵- \frac{۱}{۱} \quad ۱۶- \frac{۲}{۲} \quad ۱۸- \frac{۳}{۳} - (۱-۱)$$

$$۱۹- \frac{۱}{۱} - \left\{ \frac{۱}{۱} - ۱ \right\} \quad ۲۰- \frac{۳}{۳} - (۱-۱)$$

$$۲۱- \frac{۳}{۳} - (۱-۱) \quad ۲۳- ۲ \times ۱ - ۱ + ۱$$

$$۲۴- \frac{(۱+۱)(۱-۱)}{۱-۱}$$

$$۲۵- \frac{۱}{۱-۱} - \left\{ \frac{۱}{۱-۱} - ۱ \right\}$$

امثلة نمبری ۶ و ۷

$$۱- ۵ (۱) \quad ۲- \frac{۱}{۲} (۲) \quad ۳- \frac{۲۹}{۳۲} (۳)$$

$$۲ - \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5} - ۳$$

$$۴ - ۶ \text{ اور } ۲۴ \quad ۵ - ۹:۴ \quad ۹ - ۱۰, ۱۲, ۱۵$$

$$۱۰ - ۳, ۱۲ \quad ۱۱ - ۵, ۲۵ \quad ۱۲ - ۱۰۴, ۲۳۴$$

امثلہ نمبری ۶ ب

$$۱ - ۲۹۱۵ \quad ۲ - \frac{n}{4} (۱ - n + ۳n - ۱)$$

$$۳ - \frac{n(n+1)(۲+n)(۳+n+۵)}{۱۲} \quad ۴ - n(۳+n+۱+n)$$

$$۵ - \frac{n}{3} (۱ - n + ۴n - ۱) \quad ۶ - \frac{n(n+1)(۲+n)(۳+n)}{۴}$$

$$۷ - n(۲+n+۱) \quad ۸ - \frac{n(n+1)(۲+n)}{۶}$$

$$۹ - n(n+۱) \quad ۱۰ - \frac{1}{4} n(n+۱)(۳+n+۱)$$

$$۱۱ - n(n+۱)(۲+n+۴)$$

$$۱۲ - \frac{1}{4} n(n+۱)(۳+n+۱)$$

$$۱۳ - \frac{1}{4} (۱+n+۳+n+۱) - ۱+n$$

$$۱۴ - ۱+n - ۴ - n(n+۱)(۱-n-۱)$$

$$۱۵ - n^2$$

۱۶ - رقم اول = ۱ + ب + ج، ن کی تمام قیمتوں کے لیے جو ایک سے بڑی ہیں ن ویں رقم = ب + ج (۱ - ن) پہلی رقم کے سوائے باقی تمام رقمیں سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔

$$۱۷ - \frac{n(n+1)(۲+n)}{۶} \quad ۱۸ - \frac{n(n+۱)(۴-n-۱)}{۶}$$

$$-۱۹ \quad \frac{n(n+1)(n-1)}{2} \quad -۲۰ \quad \frac{n(n+1)(n-4)}{4}$$

$$-۲۱ \quad \frac{n(n+1)(n-5)}{4} \quad -۲۲ \quad \frac{n(n+2n+5)}{4}$$

$$-۲۳ \quad \frac{n(n+3n-13)}{4} \quad -۲۴ \quad \frac{n(n+3n+4)}{4}$$

$$-۲۵ \quad \frac{n}{(3+n)^3} \quad -۲۶ \quad \frac{444}{930}$$

$$-۲۶ \quad \frac{n}{(3+n)^3}$$

$$-۲۸ \quad \frac{n(n+2)}{(3+n)(1+n)^3} \quad -۲۹ \quad 1230$$

$$-۳۰ \quad 1130 \quad -۳۱ \quad 14424 \quad -۳۲ \quad 2240$$

$$-۳۳ \quad 21321 \quad -۳۴ \quad 52 \quad -۳۵ \quad 11849$$

$$-۳۶ \quad 1830 \quad -۳۷ \quad 11930 \quad -۳۸ \quad 190$$

$$-۳۹ \quad 300 \quad -۴۰ \quad 18299$$

$$-۴۲ \quad \text{مشکلی ۳۶۲، مربع ۲۹۰۰} \quad -۴۳ \quad 120 \quad -۴۴ \quad 223 \quad -۴۵ \quad 1$$

امثلة نمبری ۷

$$-۱ \quad \frac{4+2+2}{4} \quad -۲ \quad \frac{15+7+3}{4}$$

$$-۳ \quad \frac{1+1+1-1-1-1}{12}$$

$$-۴ \quad \frac{1-1+1-1+1-1}{1-1}$$

$$-۵ \quad \frac{10-12-15+3}{6} \quad -۶ \quad \frac{5+3+2}{2}$$

$$\frac{5}{r} + r \times \frac{1}{r} + \frac{r}{r} \times \frac{r}{r} + r \times r + \frac{1}{r} \times \frac{r}{r} + \frac{5}{r} \quad -6$$

$$\frac{0}{r} - \frac{r}{r} \times \frac{1}{4} + r \times \frac{r}{4} - \frac{r}{r} \times \frac{r}{4} + \frac{1}{r} \times \frac{r}{4} - \frac{0}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \frac{1}{256} - \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} - \frac{1}{2048} + \frac{1}{4096} - \frac{1}{8192} + \frac{1}{16384} - \frac{1}{32768} + \frac{1}{65536} - \frac{1}{131072} + \frac{1}{262144} - \frac{1}{524288} + \frac{1}{1048576} - \frac{1}{2097152} + \frac{1}{4194304} - \frac{1}{8388608} + \frac{1}{16777216} - \frac{1}{33554432} + \frac{1}{67108864} - \frac{1}{134217728} + \frac{1}{268435456} - \frac{1}{536870912} + \frac{1}{1073741824} - \frac{1}{2147483648} + \frac{1}{4294967296} - \frac{1}{8589934592} + \frac{1}{17179869184} - \frac{1}{34359738368} + \frac{1}{68719476736} - \frac{1}{137438953472} + \frac{1}{274877906944} - \frac{1}{549755813888} + \frac{1}{1099511627776} - \frac{1}{2199023255552} + \frac{1}{4398046511104} - \frac{1}{8796093022208} + \frac{1}{17592186044416} - \frac{1}{35184372088832} + \frac{1}{70368744177664} - \frac{1}{140737488355328} + \frac{1}{281474976710656} - \frac{1}{562949953421312} + \frac{1}{1125899906842624} - \frac{1}{2251799813685248} + \frac{1}{4503599627370496} - \frac{1}{9007199254740992} + \frac{1}{18014398509481984} - \frac{1}{36028797018963968} + \frac{1}{72057594037927936} - \frac{1}{144115188075855872} + \frac{1}{288230376151711744} - \frac{1}{576460752303423488} + \frac{1}{1152921504606846976} - \frac{1}{2305843009213693952} + \frac{1}{4611686018427387904} - \frac{1}{9223372036854775808} + \frac{1}{18446744073709551616} - \frac{1}{36893488147419103232} + \frac{1}{73786976294838206464} - \frac{1}{147573952589676412928} + \frac{1}{295147905179352825856} - \frac{1}{590295810358705651712} + \frac{1}{1180591620717411303424} - \frac{1}{2361183241434822606848} + \frac{1}{4722366482869645213696} - \frac{1}{9444732965739290427392} + \frac{1}{18889465931478580854784} - \frac{1}{37778931862957161709568} + \frac{1}{75557863725914323419136} - \frac{1}{151115727451828646838272} + \frac{1}{302231454903657293676544} - \frac{1}{604462909807314587353088} + \frac{1}{1208925819614629174706176} - \frac{1}{2417851639229258349412352} + \frac{1}{4835703278458516698824704} - \frac{1}{9671406556917033397649408} + \frac{1}{19342813113834066795298816} - \frac{1}{38685626227668133590597632} + \frac{1}{77371252455336267181195264} - \frac{1}{154742504910672534362390528} + \frac{1}{309485009821345068724781056} - \frac{1}{618970019642690137449562112} + \frac{1}{1237940039285380274899124224} - \frac{1}{2475880078570760549798248448} + \frac{1}{4951760157141521099596496896} - \frac{1}{9903520314283042199192993792} + \frac{1}{19807040628566084398385987584} - \frac{1}{39614081257132168796771975168} + \frac{1}{79228162514264337593543950336} - \frac{1}{158456325028528675187087900672} + \frac{1}{316912650057057350374175801344} - \frac{1}{633825300114114700748351602688} + \frac{1}{1267650600228229401496703205376} - \frac{1}{2535301200456458802993406410752} + \frac{1}{5070602400912917605986812821504} - \frac{1}{10141204801825835211973625643008} + \frac{1}{20282409603651670423947251286016} - \frac{1}{40564819207303340847894502572032} + \frac{1}{81129638414606681695789005144064} - \frac{1}{162259276829213363391578010288128} + \frac{1}{324518553658426726783156020576256} - \frac{1}{649037107316853453566312041152512} + \frac{1}{1298074214633706907132624082305024} - \frac{1}{2596148429267413814265248164610048} + \frac{1}{5192296858534827628530496329220096} - \frac{1}{10384593717069655257060992658440192} + \frac{1}{20769187434139310514121985316880384} - \frac{1}{41538374868278621028243970633760768} + \frac{1}{83076749736557242056487941267521536} - \frac{1}{166153499473114484112975882535043072} + \frac{1}{332306998946228968225951765070086144} - \frac{1}{664613997892457936451903530140172288} + \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} - \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152} + \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304} - \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608} + \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216} - \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} + \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864} - \frac{1}{170141183460469231731687303715884105728} + \frac{1}{340282366920938463463374607431768211456} - \frac{1}{680564733841876926926749214863536422912} + \frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824} - \frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648} + \frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296} - \frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592} + \frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184} - \frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368} + \frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736} - \frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472} + \frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944} - \frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888} + \frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776} - \frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552} + \frac{1}{5575186299632$$

$$\frac{r}{r_2} - \frac{1}{r_2} \times r + \frac{1}{r_2} \times r - r = 11$$

$$\frac{11}{r_5} + \frac{10}{r_5} \times \frac{1}{r_5} + \dots + \frac{2}{r_5} \times 5 + \frac{1}{r_5} \times \frac{10}{r_5} + \frac{11}{r_5} \quad -12$$

$$\frac{\frac{1}{13} + \frac{2}{13} - 1}{2} = -13$$

$$\frac{2}{r} \times \frac{1}{r} - r \times \frac{2}{r} + \frac{5}{r} \times r - r \times \frac{5}{r} + \frac{r}{r} \times \frac{5}{r} - 1 = -1$$

$$r_2 \times \frac{1}{r_2} - \frac{5}{r_2} \times \frac{r_2}{r_2} + r_2 \times r_2 - \frac{r_2}{r_2} \times \frac{r_2}{r_2} + r_2 \times \frac{5}{r_2} - \frac{1}{r_2} \times r_2 = 15$$

$$(1 - \frac{1}{4}r + \frac{r^2}{4}r - \frac{r^3}{4}r + \frac{r^4}{4}r - \frac{\Delta}{4}r) \frac{1}{r} = 14$$

$$\frac{1 + \frac{11}{4}r + \frac{14}{4}r^2 + \frac{21}{4}r^3 + \frac{24}{4}r^4 + \frac{21}{4}r^5 + r^6}{r^1} \quad -16$$

$$6 \frac{\frac{1}{4\mu} + \frac{5}{4\mu} + \frac{2}{7\mu}}{\frac{1}{4\mu} + \frac{5}{4\mu} + \frac{2}{7\mu}} = 1$$

$$r - \sqrt{2} + \sqrt{5} - 19$$

$$, \sqrt{12} + \sqrt{6} - \sqrt{3} = 20$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1 - 21$$

$$11 - 1 + \sqrt{\frac{5}{4}} - \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$-23 - 16 - 23$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2 = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{r} + 1 - \rho$$

$$۱۹- \text{لا} - \text{لا} ۶ - \text{لا} ۱۸ + \text{لا} ۲۶ - ۲۱ + ۲۲ - \frac{۵}{۳۳}$$

امثلہ نمبری ۱۹

- ۱- $۳۵ \text{ لا} + ۱۳ \text{ لا} - ۱۲ =$
- ۲- $\text{م ن لا} + (\text{ن} - \text{م}) \text{ لا} - \text{م ن} =$
- ۳- $(\text{ف} - \text{ق}) \text{ لا} + \text{م ف ق لا} - \text{ف} + \text{ق} =$
- ۴- $\text{لا} + ۲ \text{ ف لا} + \text{ف} - ۸ \text{ ق} =$
- ۵- $\text{لا} + ۶ \text{ لا} + ۳۴ =$
- ۶- $\text{لا} + ۲ \text{ لا} + \text{ر} + \text{ب} =$
- ۷- $۱۲ \text{ لا} + (\text{م} - \text{ر}) \text{ لا} - ۲ \text{ لا} =$
- ۸- $\text{لا} - ۸ \text{ لا} + ۱۴ \text{ لا} - ۴ =$
- ۱۳- $۵۳ - ۱۴ - \frac{۱ - \text{ب}}{۱ + \text{ب}}$
- ۱۴- $\frac{\text{ب ج} (۳ \text{ ر ج} - \text{ب})}{۱}$
- ۱۸- $\frac{\text{ب} (۲ \text{ ب} - ۴ \text{ ر ج})}{\text{ر ج}}$
- ۱۹- $۲۰ - ۱۵ - ۲۱ - \text{صفر}$
- ۲۲- $\text{لا} - ۲ (\text{ف} - ۲ \text{ ق}) \text{ لا} + \text{ف} (\text{ف} - ۴ \text{ ق}) =$
- ۲۴- $(۱) \frac{\text{ب} - ۲ \text{ ر ج}}{\text{ر ج}} (۲) \frac{\text{ب} (۲ \text{ ب} - ۳ \text{ ر ج})}{\text{ر ج}}$

- ۲۵- $\text{ن ب} = (۱ + \text{ن}) \text{ ر ج} - ۲۶ - \text{لا} - ۴ \text{ م ن لا} - (\text{م} - \text{ن}) =$
- ۲۶- $\text{ر ج لا} - (\text{ب} - ۲ \text{ ر ج}) (\text{ر} + \text{ج}) \text{ لا} + (\text{ب} - ۲ \text{ ر ج}) =$

امثلہ نمبری ۹ ب

- ۱- $۲ - ۲ - ۲$
- ۵- $\text{ب لا} - ۲ \text{ لا} + ۱ =$
- ۶- $(۱) \frac{\text{ف} (\text{ف} - ۴ \text{ ق}) (\text{ف} - \text{ق})}{\text{ق}} (۲) \frac{\text{ف} - ۴ \text{ ق} + \text{ق}}{\text{ق}}$
- ۱۱- $\frac{۱}{۳}$

$$-۲۴ - \frac{1}{2} \cdot 5 - ۲۵ - ۲ - \frac{9}{2} - ۲۶ - \text{صفر، } 5$$

$$-۲۷ - \frac{5}{2} - ۶ - ۲۸ - ۳ - \frac{1}{3} - \frac{35 - \sqrt{\pm 1}}{4}$$

$$-۲۹ - \frac{\sqrt{3} \pm 2}{2} - \frac{\sqrt{3} - 1}{2} - ۳۰ - ۲ - \frac{1}{2} - ۵ - \frac{1}{5}$$

$$-۳۱ - \frac{(1 - b \pm \sqrt{b^2 - 2ab - 3a^2})}{12} - ۱$$

$$-۳۲ - \frac{(1 + b) \pm (b^2 + 2ab - 3a^2)}{12} - ۱$$

$$-۳۳ - \frac{b - \sqrt{b^2 - 2ab - 3a^2}}{12} - ۱$$

$$-۳۴ - \frac{b - \sqrt{b^2 \pm 2ab - 3a^2}}{12}$$

$$-۳۵ - \frac{1}{18} \left\{ \sqrt{23b^2 \pm 20ab - 2} + \sqrt{23b^2 \pm 13} \right\} - \frac{1}{18} \left\{ \sqrt{23b^2 \pm 20ab - 2} - \sqrt{23b^2 \pm 13} \right\}$$

$$-۳۶ - 5 \pm -۳۷ - ۳ - ۱۳ - ۳۸ - \frac{12 \pm}{5}$$

$$-۳۹ - \frac{\sqrt{14b^2 \pm 1}}{2} - \frac{\sqrt{2b^2 \pm 1}}{2}$$

$$-۴۰ - \frac{2}{3} - \frac{3}{2} - ۴۱ - \text{صفر، } \frac{163}{45}$$

$$-۴۲ - \frac{(a + \sqrt{a^2 - b^2})}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

امثلہ نمبری ۱۰ ب

$$۱ - ۵ = ۵ - \frac{5}{4} \text{ اور } ۶ = ۴ - \frac{15}{4}$$

$$۲- \text{ لا } = ۲' - \frac{۸}{۱۹} \text{ اور } ۶ = ۴' - \frac{۹۷}{۱۹}$$

$$۳- \text{ لا } = ۱' - \frac{۵۳}{۸۸} \text{ اور } ۱ = ۱' - \frac{۲۵}{۲۲}$$

$$۴- \text{ لا } = ۵ \pm ۳' \text{ اور } ۳ \pm ۵' = ۵ \pm ۳'$$

$$۵- \text{ لا } = ۲' ۸ \text{ اور } ۲ = ۲' ۸$$

$$۶- \text{ لا } = ۵' ۵ \text{ اور } ۵ = ۵' ۵$$

$$۷- \text{ لا } = ۹' ۴ \text{ اور } ۴ = ۹' ۴$$

$$۸- \text{ لا } = ۲ \pm ۳' \text{ اور } ۳ \pm ۲' = ۲ \pm ۳'$$

$$۹- \text{ لا } = ۲ \pm ۳' \text{ اور } ۳ \pm ۲' = ۲ \pm ۳'$$

$$۱۰- \text{ لا } = ۵ \pm ۳' \text{ اور } ۳ \pm ۵' = ۵ \pm ۳'$$

$$۱۱- \text{ لا } = ۲ \pm ۱' \text{ اور } ۱ \pm ۲' = ۲ \pm ۱'$$

$$۱۲- \text{ لا } = ۳ \pm \sqrt{\frac{۳}{۱۹}} \text{ اور } ۰ = ۰' \pm \sqrt{\frac{۳}{۱۹}}$$

$$۱۳- \text{ لا } = ۵' ۳ \pm \sqrt{۹۷} \text{ اور } ۳ = ۵' ۳ \pm \sqrt{۹۷}$$

$$۱۴- \text{ لا } = ۲' ۲ \pm \sqrt{۱۵+۱} \text{ اور } ۲ = ۲' ۲ \pm \sqrt{۱۵+۱}$$

$$۱۵- \text{ لا } = ۲' ۲ \pm \sqrt{۱۱+۱} \text{ اور } ۲ = ۲' ۲ \pm \sqrt{۱۱+۱}$$

$$۱۶- \text{ لا } = \frac{۱}{۵} ۲' \text{ اور } ۰ = ۰' ۵$$

$$۱۷- \text{ لا } = ۲' ۱ \text{ اور } ۱ = ۲' ۱$$

$$۱۸- \text{ لا } = ۴' ۴ \text{ اور } ۱۰ = ۴' ۱۵$$

$$۱۹- \text{ لا } = ۴۲۹' ۳۲۳ \text{ اور } ۳ = ۴۲۹' ۳۲۳$$

$$۲۰- \text{ لا } = ۱' ۱۶ \text{ اور } ۱ = ۱' ۱۶$$

$$۲۱- \text{ لا } = ۹' ۴ \text{ اور } ۴ = ۹' ۴ \quad ۲۲- \text{ لا } = ۵ \text{ اور } ۴ \pm ۴'$$

$$۲۳- \text{ لا } = ۱' \frac{۵}{۳} \text{ اور } ۲ = \frac{۲}{۳} ۲' \quad ۲۴- \text{ لا } = ۹' ۱ \text{ اور } ۱ = ۹' ۱$$

$$۲۵- \text{ لا } = ۲۵ \pm ۹ \text{ اور } ۹ \pm ۲۵$$

۲۶- لا = ۶، ۲، ۴، ۳ اور ۱ = ۳، ۱، ۳، ۲

۲۷- لا = ۵ ±، ۴ ±، ۳ ±، ۲ ± اور ۱ = ۵ ±، ۴ ±، ۳ ±، ۲ ±

۲۸- لا = ۱۳، ۱۰ اور ۱ = ۱۳، ۱۰

۲۹- لا = ۱ ±، ۱۳ ± اور ۱ = ۱۳ ±، ۱ ±

۳۰- لا = ۰، ۹، ۳ اور ۱ = ۰، ۳، ۹

۳۱- لا = ۰، ۱، ۱۵ اور ۱ = ۰، ۲، ۹

۳۲- لا = ۵، ۱۰، ۲۳ اور ۱ = ۰، ۲، ۳

۳۳- لا = ۲، ۲، ۲ اور ۱ = ۲، ۲، ۲

۳۴- لا = ۱، ۱، ۱ اور ۱ = ۱، ۱، ۱

۳۵- لا = ۳ ±، ۱۸ ± اور ۱ = ۳ ±، ۱۸ ±

۳۶- لا = ۱ = ۱

۳۷- لا = ۰، ۱، ۱ اور ۱ = ۱، ۱، ۱

اور ۱ = ۰، ۱، ۱ اور ۱ = ۱، ۱، ۱

۳۸- لا = ۱، ۱، ۱ اور ۱ = ۱، ۱، ۱

۳۹۔ $\frac{b(1-b)}{1}, \frac{b}{1} = 6$ اور $\frac{1(1-b)}{b}, \frac{1}{b} = 11$

[illegible]

اور $b = a^2, a^3, a^4, \dots$ اور $b = a^2, a^3, a^4, \dots$

$$\frac{y_1}{1 - y_1 - y_1^2} \pm y_1 \pm = 0 \quad - M$$

$$\frac{1}{1-y-y^2} = \frac{1}{1-y-y^2} = \frac{1}{1-y-y^2}$$

امثلہ نمبری ۱۰۰ اج

$$r \pm = 5, d \pm = 6, r \pm = 0 \quad -1$$

$$c = 5, d = 6, e = 11 \quad - 2$$

۳۔ $4 = 5 - 1$ اور $1 = 6 - 5$ اور $5 = 2$

۴۔ لا = ۸ اور ۳ = ۳ اور ۳ = ۸

$$\frac{\sqrt{101} \pm 2}{\mu}, \mu = 6, 101 \frac{\sqrt{101} \pm 2}{\mu}, \mu = 11 \quad - (9)$$

اوری = ۲ -

$$\Delta \pm = 5', \pm = 1', \pm = 1' \quad - 4$$

$$1 \pm = 6, 1 \pm = 6, 0 \pm = 11 \quad -6$$

۸۔ ۱ = ۸ - ۸ اور ۵ = ۵ - ۵ اور ۳ = ۳ - ۳

$$\frac{1}{4} = 0, \frac{1}{4} = 5, 7 = 6, 7 = 0 \quad -4$$

۱۰- ۱=۵ ۲=۶ ۳=۷

۱۱۔ لا = ۵، اور ۶ = ۳، اور ۷ = ۴

۱۲۔ $1-2=1$ اور $2-3=1$ اور $3-4=1$ اور $4-5=1$ اور $5-6=1$ اور $6-7=1$ اور $7-8=1$ اور $8-9=1$ اور $9-10=1$ اور $10-11=1$ اور $11-12=1$ اور $12-13=1$ اور $13-14=1$ اور $14-15=1$ اور $15-16=1$ اور $16-17=1$ اور $17-18=1$ اور $18-19=1$ اور $19-20=1$ اور $20-21=1$ اور $21-22=1$ اور $22-23=1$ اور $23-24=1$ اور $24-25=1$ اور $25-26=1$ اور $26-27=1$ اور $27-28=1$ اور $28-29=1$ اور $29-30=1$ اور $30-31=1$ اور $31-32=1$ اور $32-33=1$ اور $33-34=1$ اور $34-35=1$ اور $35-36=1$ اور $36-37=1$ اور $37-38=1$ اور $38-39=1$ اور $39-40=1$ اور $40-41=1$ اور $41-42=1$ اور $42-43=1$ اور $43-44=1$ اور $44-45=1$ اور $45-46=1$ اور $46-47=1$ اور $47-48=1$ اور $48-49=1$ اور $49-50=1$ اور $50-51=1$ اور $51-52=1$ اور $52-53=1$ اور $53-54=1$ اور $54-55=1$ اور $55-56=1$ اور $56-57=1$ اور $57-58=1$ اور $58-59=1$ اور $59-60=1$ اور $60-61=1$ اور $61-62=1$ اور $62-63=1$ اور $63-64=1$ اور $64-65=1$ اور $65-66=1$ اور $66-67=1$ اور $67-68=1$ اور $68-69=1$ اور $69-70=1$ اور $70-71=1$ اور $71-72=1$ اور $72-73=1$ اور $73-74=1$ اور $74-75=1$ اور $75-76=1$ اور $76-77=1$ اور $77-78=1$ اور $78-79=1$ اور $79-80=1$ اور $80-81=1$ اور $81-82=1$ اور $82-83=1$ اور $83-84=1$ اور $84-85=1$ اور $85-86=1$ اور $86-87=1$ اور $87-88=1$ اور $88-89=1$ اور $89-90=1$ اور $90-91=1$ اور $91-92=1$ اور $92-93=1$ اور $93-94=1$ اور $94-95=1$ اور $95-96=1$ اور $96-97=1$ اور $97-98=1$ اور $98-99=1$ اور $99-100=1$ اور $100-101=1$ اور $101-102=1$ اور $102-103=1$ اور $103-104=1$ اور $104-105=1$ اور $105-106=1$ اور $106-107=1$ اور $107-108=1$ اور $108-109=1$ اور $109-110=1$ اور $110-111=1$ اور $111-112=1$ اور $112-113=1$ اور $113-114=1$ اور $114-115=1$ اور $115-116=1$ اور $116-117=1$ اور $117-118=1$ اور $118-119=1$ اور $119-120=1$ اور $120-121=1$ اور $121-122=1$ اور $122-123=1$ اور $123-124=1$ اور $124-125=1$ اور $125-126=1$ اور $126-127=1$ اور $127-128=1$ اور $128-129=1$ اور $129-130=1$ اور $130-131=1$ اور $131-132=1$ اور $132-133=1$ اور $133-134=1$ اور $134-135=1$ اور $135-136=1$ اور $136-137=1$ اور $137-138=1$ اور $138-139=1$ اور $139-140=1$ اور $140-141=1$ اور $141-142=1$ اور $142-143=1$ اور $143-144=1$ اور $144-145=1$ اور $145-146=1$ اور $146-147=1$ اور $147-148=1$ اور $148-149=1$ اور $149-150=1$ اور $150-151=1$ اور $151-152=1$ اور $152-153=1$ اور $153-154=1$ اور $154-155=1$ اور $155-156=1$ اور $156-157=1$ اور $157-158=1$ اور $158-159=1$ اور $159-160=1$ اور $160-161=1$ اور $161-162=1$ اور $162-163=1$ اور $163-164=1$ اور $164-165=1$ اور $165-166=1$ اور $166-167=1$ اور $167-168=1$ اور $168-169=1$ اور $169-170=1$ اور $170-171=1$ اور $171-172=1$ اور $172-173=1$ اور $173-174=1$ اور $174-175=1$ اور $175-176=1$ اور $176-177=1$ اور $177-178=1$ اور $178-179=1$ اور $179-180=1$ اور $180-181=1$ اور $181-182=1$ اور $182-183=1$ اور $183-184=1$ اور $184-185=1$ اور $185-186=1$ اور $186-187=1$ اور $187-188=1$ اور $188-189=1$ اور $189-190=1$ اور $190-191=1$ اور $191-192=1$ اور $192-193=1$ اور $193-194=1$ اور $194-195=1$ اور $195-196=1$ اور $196-197=1$ اور $197-198=1$ اور $198-199=1$ اور $199-200=1$ اور $200-201=1$ اور $201-202=1$ اور $202-203=1$ اور $203-204=1$ اور $204-205=1$ اور $205-206=1$ اور $206-207=1$ اور $207-208=1$ اور $208-209=1$ اور $209-210=1$ اور $210-211=1$ اور $211-212=1$ اور $212-213=1$ اور $213-214=1$ اور $214-215=1$ اور $215-216=1$ اور $216-217=1$ اور $217-218=1$ اور $218-219=1$ اور $219-220=1$ اور $220-221=1$ اور $221-222=1$ اور $222-223=1$ اور $223-224=1$ اور $224-225=1$ اور $225-226=1$ اور $226-227=1$ اور $227-228=1$ اور $228-229=1$ اور $229-230=1$ اور $230-231=1$ اور $231-232=1$ اور $232-233=1$ اور $233-234=1$ اور $234-235=1$ اور $235-236=1$ اور $236-237=1$ اور $237-238=1$ اور $238-239=1$ اور $239-240=1$ اور $240-241=1$ اور $241-242=1$ اور $242-243=1$ اور $243-244=1$ اور $244-245=1$ اور $245-246=1$ اور $246-247=1$ اور $247-248=1$ اور $248-249=1$ اور $249-250=1$ اور $250-251=1$ اور $251-252=1$ اور $252-253=1$ اور $253-254=1$ اور $254-255=1$ اور $255-256=1$ اور $256-257=1$ اور $257-258=1$ اور $258-259=1$ اور $259-260=1$ اور $260-261=1$ اور $261-262=1$ اور $262-263=1$ اور $263-264=1$ اور $264-265=1$ اور $265-266=1$ اور $266-267=1$ اور $267-268=1$ اور $268-269=1$ اور $269-270=1$

۱۳۔ $3 = 1$ ، $\frac{7}{2}$ اور $6 = 4$ ، $\frac{77}{6}$ اور $5 = 4$

۱۴- لا = و' صفر، صفر اورا = صفر، و' صفر اورا = صفر، صفر، و'

۱۵- لا = $\frac{1}{31}$ ، $\frac{1}{9-1 \pm 31}$

$\frac{1}{9-1 \pm 315}$ ، $\frac{1}{31} = 6$

$\frac{1}{9-1 \pm 31}$ ، $\frac{1}{31} = 5$

۱۶- لا = و' ۲-، $\frac{1}{15-1 \pm 4}$

$\frac{1}{15-1 \pm 11}$ ، $\frac{1}{2} = 6$

$\frac{1}{15-1 \pm 1}$ ، $\frac{1}{2} = 5$

امثلة نبري ۱۱ و

۴ - ۳	۶' ۶ - ۲	۲۴ - ۱
۱۲ - ۶	۱۸ - ۵	۱۰ - ۴
	۱۱۶۲۸، ۱۰۶۲۶، ۶۳۴۵۶۰۰، ۳۰۳۲۰	۸ - ۸
۳۶۰، ۱۵ - ۱۱	۱۲۰، ۵۰، ۴۰ - ۱۰	۱۵ - ۹
۴۲۰ - ۱۴	۱۲۰ - ۱۳	۶ - ۱۲
۶۳۴۵۶۰۰ - ۱۶	۱۴۴۰ - ۱۷	۱۵ - ۱۵
۲۳۱، ۱۱۴۰ - ۲۰	۲۳۰، ۳۰۰ - ۱۹	۱۴۴، ۳۶۰ - ۱۸
۸۴۸ - ۲۳	۸۹۲، ۲۲۳ - ۲۲	۱۴۲ - ۲۱
۳۰۰ - ۲۶	۲۱۰ - ۲۵	۵۶ - ۲۴
۳۶۹۶۰۰ - ۲۹	۲۰۵۲۰۰ - ۲۸	۳۶۰۰۰ - ۲۶
۵۴۶۰ - ۳۲	۲۰۱ - ۳۱	۲۱۶۰۰ - ۳۰

۳۳ - ۲۹۰۳۰۴۰	۳۳ - ۲۵۹۲۰	۳۶ - ۴۱
۳۴ - ۱۹۵۶	۳۸ - ۷	۳۹ - ۳۸۰

امثلہ نمبری ۱۱ ب

۳ - ۲۵۵	۴ - ۲۸	
۵ - ۹۰۷۲۰۰ (۱)	۶ - ۱۰۰۸۰ (۲)	۷ - ۳۰۲۳۰ (۳)
۶ - ۱۵۱۳۵۱۲۰۰	۷ - ۳۶۰	۸ - ف
۹ - ۳۰	۱۰ - ۱۲۶۰ (۱)	۱۱ - ۲۷۷۲۰ (۲)
۱۱ - ۳۳۷۴	۱۲ - ۲۵۵	
۱۳ - $\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n(n+1)}$	۱۴ - ۴۰۹۵	
۱۵ - ۵۷۷۶۰۰۰۰	۱۶ - ۳۶۲۸۸۰۰۰۷۲۰	
۱۷ - ۳۶۰	۱۸ - ۴	۱۹ - ۱۲۷
۲۰ - ۳۱۵	۲۱ - $\frac{n}{n(n+1)}$	
۲۲ - ۳۲۵۶۴	۲۳ - ۴۲	۲۴ - $\frac{1}{n(n+1)}$
۲۵ - (۱) $\frac{f(f-1)}{2} - \frac{q(q-1)}{2} + 1$		
(۲) $\frac{f(f-1)(f-2)}{6} - \frac{q(q-1)(q-2)}{6}$		
۲۶ - $\frac{n}{(f+1)-1}$	۲۷ - ۲۱۹۰۱۱۳	۲۸ - ۲۲۵۲
۲۹ - ۶۶۶۶۶۰۰	۳۰ - ۵۱۹۹۹۶۰	

امثلة نمبری ۱۳

- ۱- $۵۱۵ - ۵۹۰ + ۲۴۰ - ۵۰۵ + ۲۲۳$
- ۲- $۸۱ + ۲۱۶ + ۲۱۶ + ۲۱۶ + ۲۱۶ + ۲۱۶$
- ۳- $۳۲ - ۵۸۰ + ۲۸۰ - ۲۸۰ + ۲۸۰ - ۲۸۰$
- ۴- $۱۸ - ۱۳۵ + ۵۴۰ - ۱۲۱۵ + ۱۴۵۸ - ۴۲۹$
- ۵- $۵ + ۵ + ۱۰ + ۱۰ + ۵ + ۵$
- ۶- $۱ - ۲۱ + ۳۵ - ۳۵ + ۲۱ - ۵۲۱ + ۵۲۱ - ۵۲۱ + ۵۲۱$
- ۷- $۱۶ - ۲۸ + ۵۴ - ۲۴ + ۸۱$
- ۸- $۴۲۹ - ۹۴۲ + ۵۴۰ - ۱۴۰ + ۳۸۰ - ۲۴ + ۶۲$
- ۹- $۱ + \frac{۵۲۱}{۲} + \frac{۲۱}{۴} + \frac{۳۵}{۱۶} + \frac{۳۵}{۸} + \frac{۲۱}{۲} + \frac{۵۲۱}{۱۲۸}$
- ۱۰- $\frac{۴۲۹}{۵۴۲} + \frac{۲۲۳}{۵۸} - \frac{۱۳۵}{۲۵۲} + ۲۰ - \frac{۲۰}{۲} + \frac{۳۲}{۲۴} - \frac{۶۲}{۴۲۹}$
- ۱۱- $\frac{۱}{۲۵۴} + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۳۵}{۸} + \frac{۳۵}{۲} + \frac{۳۵}{۱۶} + \frac{۳۵}{۱۶} + \frac{۳۵}{۱۶}$
- ۱۲- $۱ - \frac{۱۰}{۵} + \frac{۲۵}{۵} - \frac{۱۲۰}{۲۵} + \frac{۲۱۰}{۱۲۰} - \frac{۲۵۲}{۲۱۰} + \frac{۲۱۰}{۲۵۲} - \frac{۱۲۰}{۲۱۰} + \frac{۲۵}{۲۵} - \frac{۱۰}{۱۰} + \frac{۱}{۱}$
- ۱۳- $۳۵۴۵۰ - ۱۱۲۶۴۰$
- ۱۴- $۳۱۲ - ۳۰$
- ۱۵- $\frac{۳۰}{(۳۱-۲۴)} (۵) (۶۰)$
- ۱۶- ۱۱۲۰
- ۱۷- ۱۱۲۰
- ۱۸- ۱۱۲۰

- ۲۰- $\frac{10500}{\text{لا}}$
- ۲۱- $\frac{10600}{\text{رَب}}$
- ۲۲- $8 + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا}$
- ۲۳- $\text{لا} (16 - 20 - 5 + 5)$ ۲۴ ۲۶۱۴۰
- ۲۵- $2(365 - 363 + 63 - 6)$
- ۲۶- $252 - \frac{229}{16}$
- ۲۷- $\frac{189}{8} - \frac{21}{16}$
- ۲۸- $\frac{110545}{\text{رَب}}$
- ۲۹- $1365 - 1365$
- ۳۰- 82 رَب
- ۳۱- 18562
- ۳۲- $\frac{\text{ن}}{2} \left(\frac{1}{2}(\text{ن} + \text{ر}) \right) - \frac{\text{ن}}{2} \left(\frac{1}{2}(\text{ن} - \text{ر}) \right)$
- ۳۳- $\frac{6}{18}$
- ۳۴- $\frac{\text{ن}}{\text{ن}}$
- ۳۵- $(1 - \frac{\text{ن}}{\text{ن}})$

امثلہ نمبری ۱۳ ب

- ۱- ۱۳۴- ۲- ۶- ۳- ۲۹۲-
- ۴- ۵۸۴- ۶- ۱۵۱۰- ۷- ۱۵۰۰۶-
- ۸- ۱۵۰۱۲۰۶- ۹- ۱۵۰۰۳۵۰۵- ۱۰- بارہویں
- ۱۱- چھٹی ۱۲- دسویں اور گیارہویں
- ۱۳- تیسری رقم = $\frac{2}{3}$ ۱۴- چوتھی اور پانچویں رقمیں = $\frac{4}{144}$
- ۱۵- لا = ۲، ۳ = ۱، ۴ = ۵
- ۱۸- $1 + 8 + 20 + 8 - 26 - 8 + 20 + 8 - 8 + 1$

$$3r_2 + 4j_5r - 5j_{11}r + 5j_{11}r - 5j_{11}r + 4j_5r - 3r_2 \quad -19$$

$$-20. \quad \frac{1}{1-r} \times \frac{1}{1-r-1} = \frac{1}{1-r-1}$$

$$1 + \omega^2 - \epsilon^2 \gg \frac{1 + \omega^2}{\epsilon - \omega^2} \frac{1 + \epsilon}{1 + \epsilon} \epsilon (1 -) - 21$$

۲۲- ۱۴ ۲۳- ۱۲ = ۱۱ ۲۵- ۵ = ۲۰

1-24

$$\binom{0}{\frac{11+1}{11+1}} - 36 \qquad \frac{\binom{0}{(11-1)} + \binom{0}{(11+1)}}{2} - 37$$

امثلہ نمبری ۱۲ و

۶- مستدق

۶- مستدق
۷- مستدق
۸- اگر $a > b$ مستدق، اگر $a \leq b$ تو غیر مستدق
۹- مستدق

۹- مستدق

۱۰- اگر $a > 1$ یا $a = 1$ تو مستدق، اگر $a < 1$ تو غیر مستدق

امثلة نمبری ۱۲ اب

$$U \frac{1}{14} - U \frac{7}{8} + U \frac{7}{4} + 1 = 2 \qquad U \frac{1}{14} + U \frac{1}{2} - U \frac{1}{4} + 1 = 1$$

$${}^2U_1 - {}^2U_2 + {}^2U_2 - 1 = -3 \quad {}^2U_{\frac{1}{15}} - {}^2U_{\frac{2}{15}} - U_{\frac{2}{5}} - 1 = -3$$

$$r_U \frac{1}{r} + r_U r + U + 1 = 4 \quad r_U \frac{5}{r} - r_U - U - 1 = 5$$

- ۶- $1 - 1 - 1 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$ $1 - 1 - 1 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$
- ۹- $1 + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5}$ $1 - 1 - 1 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$
- ۱۱- $\frac{1}{8} (1 - 1 - 1 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} - \frac{1}{2})$
- ۱۲- $3 (1 + \frac{1}{9} - \frac{1}{142} + \frac{1}{1358})$
- ۱۳- $4 (1 + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4})$
- ۱۴- $\frac{1}{2} (1 + 1 + \frac{5}{4} + \frac{35}{52})$
- ۱۵- $\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{2})$
- ۱۶- $\frac{229}{14}$ $\frac{44}{254}$
- ۱۸- $\frac{1040}{81}$ $\frac{14}{223}$
- ۲۰- $1 (1 + 1)$ $\frac{(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)}{3 \times 2 \times 1}$
- ۲۲- $1 - 1 (1 - 1)$ $\frac{(1 - 1) \dots \times 5 \times 3 \times 1}{1}$
- ۲۳- $1 - 1 (1 - 1)$ $\frac{(1 - 1) \dots \times 11 \times 8 \times 5 \times 2 \times 1}{1}$
- ۲۴- $1 - 1 (1 - 1)$ $\frac{19612}{3}$
- ۲۵- $1 - 1 (1 - 1)$ $\frac{19612}{3}$

$$\begin{aligned}
 -۲۷ & \quad ۱+۳r \\
 -۲۸ & \quad (۱+r)(۳+r) \\
 -۲۹ & \quad \text{چوتھی} \\
 -۳۰ & \quad \text{تمام سوائے دو کے} \\
 -۳۱ & \quad \frac{1}{5r} (1 - \frac{1}{5r} + \frac{1}{5r^2} - \dots)
 \end{aligned}$$

امثلہ نمبری ۴۴ ج

$$-۱ \quad \frac{(1-r) \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (r-1)}{r!}$$

$$-۲ \quad \frac{(1+r)(2+r)(3+r)(4+r)}{r!}$$

$$-۳ \quad \frac{(1-r) \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (r-1)}{r!}$$

$$-۴ \quad \frac{(1-r) \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (r-1)}{r!}$$

$$-۵ \quad \frac{(1-r)(2+r)}{r!}$$

$$-۶ \quad \frac{(1+r) \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (r-1)}{r!}$$

$$-۷ \quad \frac{(1-r) \times 1}{1+r} \quad -۸ \quad \frac{1+r}{2+r}$$

$$-۹ \quad \frac{r!}{r-r} \times \frac{(5-r) \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (r-1)}{r!}$$

$$-۱۰ \quad \frac{(1-r) \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (r-1)}{r!}$$

$$-۱۱ \quad \frac{(1-r) \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (r-1)}{r!}$$

$$-۱۲ \quad \frac{(۱+ن)(۱+ن^۲).....(۱+ن \times ۱-ر)}{۱+ن \times ۱-ر} \times \frac{۱}{۱+ن}$$

$$-۱۳ \quad \text{تیسری} \quad -۱۴ \quad \text{پانچویں} \quad -۱۵ \quad \text{تیرھویں}$$

$$-۱۶ \quad \text{ساتویں} \quad -۱۷ \quad \text{چوتھی اور پانچویں} \quad -۱۸ \quad \text{تیسری}$$

$$-۱۹ \quad ۹۵۸۹۹۲۹ \quad -۲۰ \quad ۹۵۹۹۳۳۳$$

$$-۲۱ \quad ۱۰۵۰۰۹۹۹ \quad -۲۲ \quad ۶۵۹۹۹۲۷$$

$$-۲۳ \quad ۵۱۹۸۲۲ \quad -۲۴ \quad ۱۵۰۰۱۳۳$$

$$-۲۵ \quad ۵۰۰۷۹۵ \quad -۲۶ \quad ۵۵۰۰۰۹۶$$

$$-۲۷ \quad ۱ - \frac{۲۳}{۴} \quad -۲۸ \quad \frac{۲}{۳} \left(۱ + \frac{۱}{۲۴} \right)$$

$$-۲۹ \quad ۱ - \frac{۱۵}{۸} \quad -۳۰ \quad \frac{۱}{۴} - \frac{۵}{۶}$$

$$-۳۱ \quad ۱ - \frac{۳۴۳}{۱۲۰} \quad -۳۲ \quad \frac{۱}{۳} - \frac{۷۱}{۳۶۰}$$

$$-۳۵ \quad ۱ - ۴ + ۱۳ + ۱۲ \quad -۳۶ \quad ۲ + \frac{۲۹}{۴} + \frac{۲۹}{۳۲}$$

امثلہ نمبری ۱۲ و

$$۱ - ۱۹۷ - ۲ - ۱۴۲ - ۳ - (۱ - ۱) - ۵$$

$$۴ - (۱ - ۱) (۲ + ۲ + ۲) - ۶ - ۸ = (۱ - \frac{۱}{۲}) - \frac{۲}{۲}$$

$$۷ - (۱ - \frac{۲}{۳}) = (۱ - \frac{۱}{۳}) - \frac{۱}{۳} \quad -۱۲ \quad \frac{۲}{۳} \quad \frac{۱}{۳}$$

$$-۱۴ \quad (۱ - ۱) - (۱ - ۱) = ۳ - ۳ \quad \text{۳ کی مدد سے دیا ہوا نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔}$$

$$4541(2) \quad 15(1) \quad -14$$

۱۸- $(1)(1+1)^n(1+1)^{n-1} = (1+1)^n$ ایسے لاکھ سہروں کو مساوی رکھو

$$(2) (1 + \lambda)^n = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{-n} = \lambda^n (1 + \lambda)^{-n} \text{ میں مطلق رقموں کو مساوی رکھو}$$

۲۰۔ دائیں طرف کا سلسلہ + (۱-)ⁿ قⁿ = لاⁿ کا سر جملہ (۱- لا^۲)^{-۱} میں

$$\frac{\frac{u_2}{u_1}}{\frac{u_1}{u_1}} \times \frac{1}{r} - 1 - u_2 \quad -21$$

$$[(\text{ج} + \dots + \text{ج} + \text{ج})^2 - (\dots + \text{ج} + \text{ج} + \text{ج} + \text{ج})]$$

$$= \text{ج}^1 + \text{ج}^2 + \text{ج}^3 + \dots + \text{ج}^n \text{ کو استعمال کرو}$$

امثلہ نمبری ۱۵

۳۳۴- -۳ ۱۹۸- -۲ ۱۲۹۰۰- -۱

۴ - ۱۳۶۰ ز. ۳ ج ۲ - ۵ - ۹

19.5 - 10 2. - 6 1.10 - 4

1- -11 $\frac{2}{4}$ - -10 1- -9

$$1 - 1^2 \quad \frac{29}{14} \quad -1^2 \quad \frac{2}{11} - 1^2$$

$$11 \frac{2}{3} - 11 \frac{1}{4} = 14 \frac{5}{12} = 14 \frac{1}{3}$$

$$\Delta U_{r.} = U_{\Delta} + U_r + U_{r-1} \quad -16$$

$$(1 \frac{9}{8} + 1 \frac{9}{8} - 1 \frac{9}{8} + 1 \frac{9}{8} + 1 \frac{9}{8} - 1) 14 = 14$$

امثلة نمبری ۱۶

- ۱- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۲- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۳- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۴- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۵- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۶- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۷- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۸- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۹- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۱۰- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۱۱- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۱۲- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۱۳- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۱۴- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۱۵- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۱۶- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۱۷- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۱۸- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۱۹- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۲۰- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۲۱- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۲۲- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۲۳- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$

امثلة نمبری ۱۷

- ۱- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۲- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۳- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$
- ۴- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$

۱۶۴۲۵	-۳
اعشاریہ کا دوسرا مقام، اکائی کا مقام، اعشاریہ کا پانچواں مقام	-۴
۱۵۸۰۶۱۸۰۰	-۵
۷۵۱۰۴۲۱۰۰	-۷
۲۵۰۹۶۹۱۰۰	-۸
۵۶۶۹۰۰۶۷	-۱۰
۵۰۵۶۳۵۲۰	-۱۲
۵۴۴۰۹۲۳۸۸	-۱۴
۱۹۱۵۶۳۵۱	-۱۶
۱۵۰۰۳۹۲۳۸	-۱۸
۱۷۸۵۱۴۱۵۱۶	-۲۰
۳۰۱	-۲۳
۴۵۲۹	-۲۵
۱۴۵۲۰۶	-۲۷
۳۵۵۶۲	-۲۸

$$\frac{\text{لوک ۲}}{\text{لوک ۳ - لوک ۲}} = ۱۱ = \frac{\text{لوک ۳}}{\text{لوک ۳ - لوک ۲}}$$

$$\frac{\text{لوک ۳}}{\text{۴ (لوک ۳ - لوک ۲)}} = ۱۱ = \frac{\text{۳ لوک ۳ - ۲ لوک ۲}}{\text{۴ (لوک ۳ - لوک ۲)}}$$

$$۱۵۶۴۶۰۱ - ۳۱$$

$$۵۵۶۱۴ = \frac{\text{لوک ۲}}{\text{لوک ۴}} = ۵۱۷۸۱ = \frac{\text{لوک ۲}}{\text{لوک ۴}}$$

امثلہ نمبری ۱۷

$$\frac{\text{لوک ۲}}{\text{لوک ۳ - لوک ۲}} = ۳$$

$$-۷ \quad ۵۶۶۶۶۶۰ \dots ۲۰۰۰۰۰۰۰۰ \quad -۱۰ \quad -۱۱ \quad -۱۲$$

$$-۱۱ \quad ۱۵۰۴۱۳۹۲۴۵۰۹۸۰ \quad ۱۵۰۴۱۳۹۲۴۵۰۹۸۰ \quad ۱۵۰۴۱۳۹۲۴۵۰۹۸۰$$

$$-۱۳ \quad \frac{1}{r} \times \frac{1-r}{1-r} \quad -۱۴ \quad \frac{1}{r} \times \frac{1-r}{1-r}$$

$$-۱۵ \quad \frac{1}{r} \times \frac{1-r}{1-r} + \frac{1}{r} \times \frac{1-r}{1-r} + \dots + \frac{1}{r} \times \frac{1-r}{1-r} + 1$$

$$-۱۶ \quad \frac{1}{r} \times \frac{1-r}{1-r} + \dots + \frac{1}{r} \times \frac{1-r}{1-r} + 1$$

$$-۲۳ \quad \frac{1}{r-1} + \text{لوک } (1-r)$$

$$-۲۹ \quad ۱۵۰۴۱۳۹۲۴۵۰۹۸۰ \quad ۱۵۰۴۱۳۹۲۴۵۰۹۸۰ \quad ۱۵۰۴۱۳۹۲۴۵۰۹۸۰$$

$$1 = \text{لوک } \left(\frac{1}{r} - 1 \right) = ۱۰۵۳۶۰۵۱۶$$

$$ب = \text{لوک } \left(\frac{1}{r} - 1 \right) = ۰۴۰۸۲۱۹۹۵$$

$$ج = \text{لوک } \left(\frac{1}{r} + 1 \right) = ۰۱۲۴۲۲۵۲۰$$

د

J

Joint variation

تغیر مشترک

Jupiter

مشتری

L

Limit

انتهای

Logarithmic series

لوگاریتمی سلسله

Linear (permutations)

خطی (ترتیب)

Logarithmic Tables

لوگاریتمی جدولین

Logarithm

لوگاریتم

Logarithmic base

لوگاریتمی اساس

M

Mantissa

اعشاریه لوگاریتمی

Multiple

ضعیف

Mass

مقدار ماده

Multiplying factor

ضارب جزو ضربی

Middle term

درمیانی رقم

Multinomial theorem

مسئله کثیرالارقام

N

Natural logarithm

طبعی لوگاریتم

Notation

ترقیم

Natural numbers

طبعی اعداد

Ninth power

نویں قوت

Negative

منفی

Ninth root

نواں جذر

N-factorial

ضربی N

Numerator

شمارکننده

Non-convergent (series)

غیر مستند (سلسله)

Numerically

تعداداً

O

Odd

طاق

Ordinate

معین

F

Factor	جزو ضربی	Fractions	کسور
Finite series	متناهی سلسله	Fractional	کسری
Formula	ضابطه	Function (of X)	تفاعل (۵۶)

G

Gas	گیس	Geometric mean	هندسی اوسط
General Form	صورت عامه	Geometry	علم هندسه
Geometrical	هندسیه		
Geometrical progression	سلسله هندسیه		

H

Harmonic mean	موسیقی اوسط	Homogeneous (expression)	متجانس (جمله)
Harmonic progression	سلسله موسیقیه	Hyperbola	قطع زائد
Height	ارتفاع	Hypothesis	مفروضه

I

Identity	مساوات متماثلہ	Inequality	لاتساوی
Imaginary quantities	مقادیر خیالی	Infinite	لا انتها
Incommensurable (numbers)	متبائن (اعداد)	Inifinite series	لامتناهی سلسله
Independent (variable)	متبوع (متغیر)	Integer	صحیح عدد
Index	قوت نما	Intensity (of light)	اشدداد (روشنی کی)
Induction	استقراء	Inverse variation	تغیر معکوس
		Invertendo (ratio)	عکس (نسبت)

Composite number	عدد مرکب	Continued proportion	تناسب مسلسل
Compounding (of ratios)	تالیف (نسبتوں کی)	Convergence	استدقاق
Compound Surd	مرکب اصم	Convergent series	مستندق سلسلہ
Concrete (quantities)	مقرون (مقادیر)	Corresponding values	متناظر قیمتیں
Conjugate	زوج یا مزدوج	Co-ordinate	محدد
Consecutive terms	ارقام متصلہ	Cross Multiplication	ضرب چلیپائی
Consequent (ratio)	موخر (نسبت)	Cross section	تراش عمودی
Constant (quantity)	مستقل (مقدار)	Cube	مکعب
		Cube root	جذر الکعب

D

Denominator	نسب نما	Dimensions	ابعاد
Dependent (variable)	تابع (متغیر)	Direct variation	تغیر مستقیم
Descending powers	نزولی قوتیں (کھٹتی ہوئی قوتیں)	Dissimilar (things)	غیر متشابه (اشیاء)
Determinants	مقطعات	Dividendo	تفصیل نسبت
Digits	ہند سے	Duplicate (ratio)	دھری نسبت (نسبت)

E

Elastic string	لچکدار رسی	Equipmultiples	اضغاف متساویہ
Electric current	برقی رَو	Expand	پھیلاؤ
Eliminant	حاصل اسقاط	Expansion	صورت تفصیلی یا تفصیل
Eliminate	ساقط کرنا	Exponential Theorem	مسئلہ قوت نما
Elimination	اسقاط	Expression	جملہ
Equation	مساوات	Extremes	طرفین
Equilateral triangle	مثلث مساوی الاضلاع	Even	جفت

اصطلاحات جبر و مقابله

(حصه اول)

Algebraical Terms

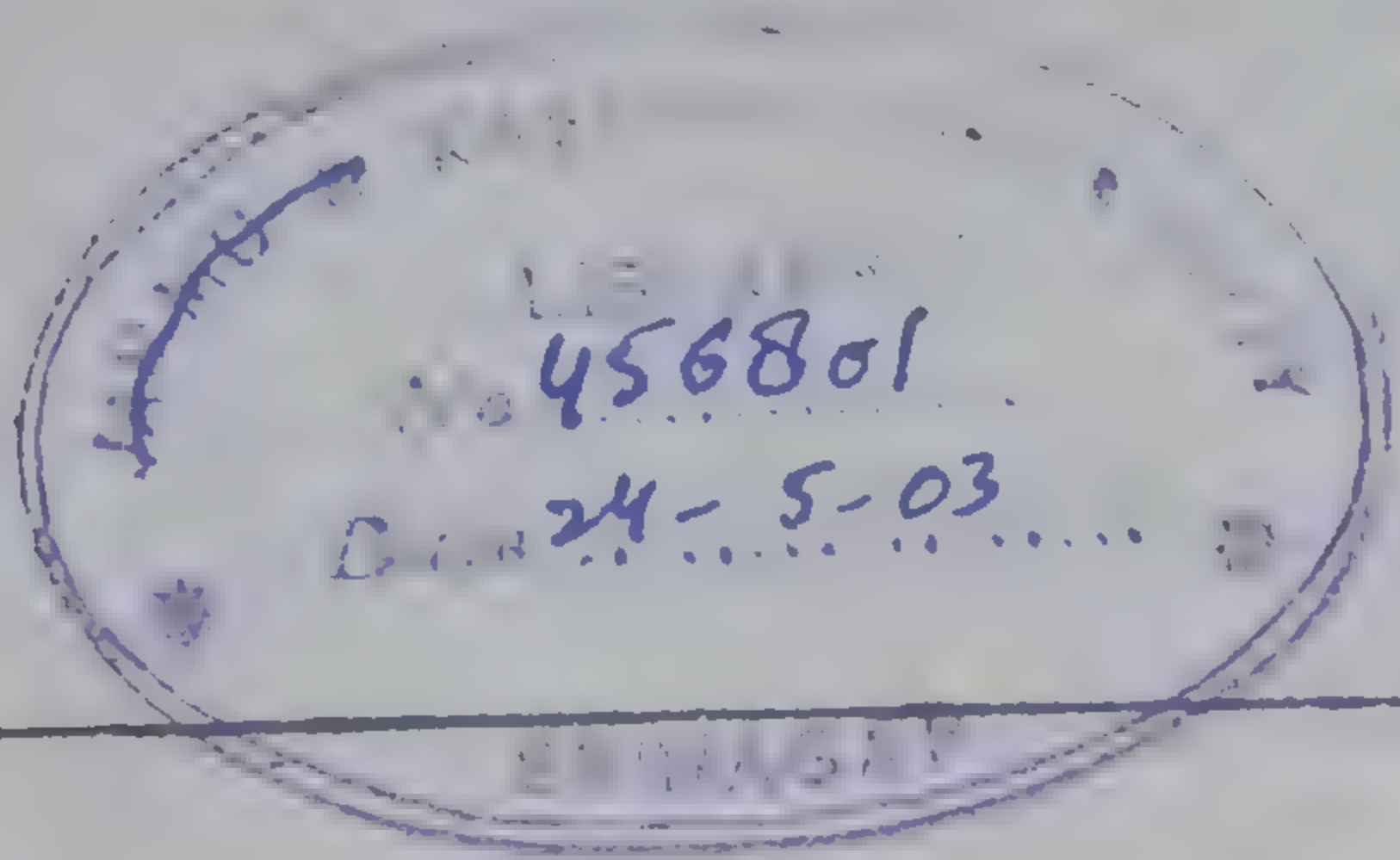
A			
Abscissa	فصله	Antilogarithms	عکس لوکارتم
Absolute term	رقم مطلق	Approximation	تقرب
Algebra	جبر و مقابله	Arithmetical progression	سلسلہ حسابیہ
Alternando (ratio)	تبدیل (نسبت)	Arithmetic mean	اوسط حسابی
Antecedent (ratio)	مقدم (نسبت)		
B			
Base (triangle)	قاعدہ (مثلث)	Binomial Theorem	مسئلہ ثنائی
Base (logarithm)	اساس (لوکارتم)		
C			
Characteristic	میز	Common difference	فرق مشترک
Circular Cone	مخروط مستدیر	Common ratio	نسبت مشترک
Circular permutations	مدور ترتیبیں	Common logarithm	مروج یا عشری لوکارتم
Coefficient	سر	Complementary (Combination)	متمم (اجتماع)
Combination	اجتماع		
Commensurable (numbers)	متوافق (اعداد)	Componendo (ratio)	ترکیب (نسبت)

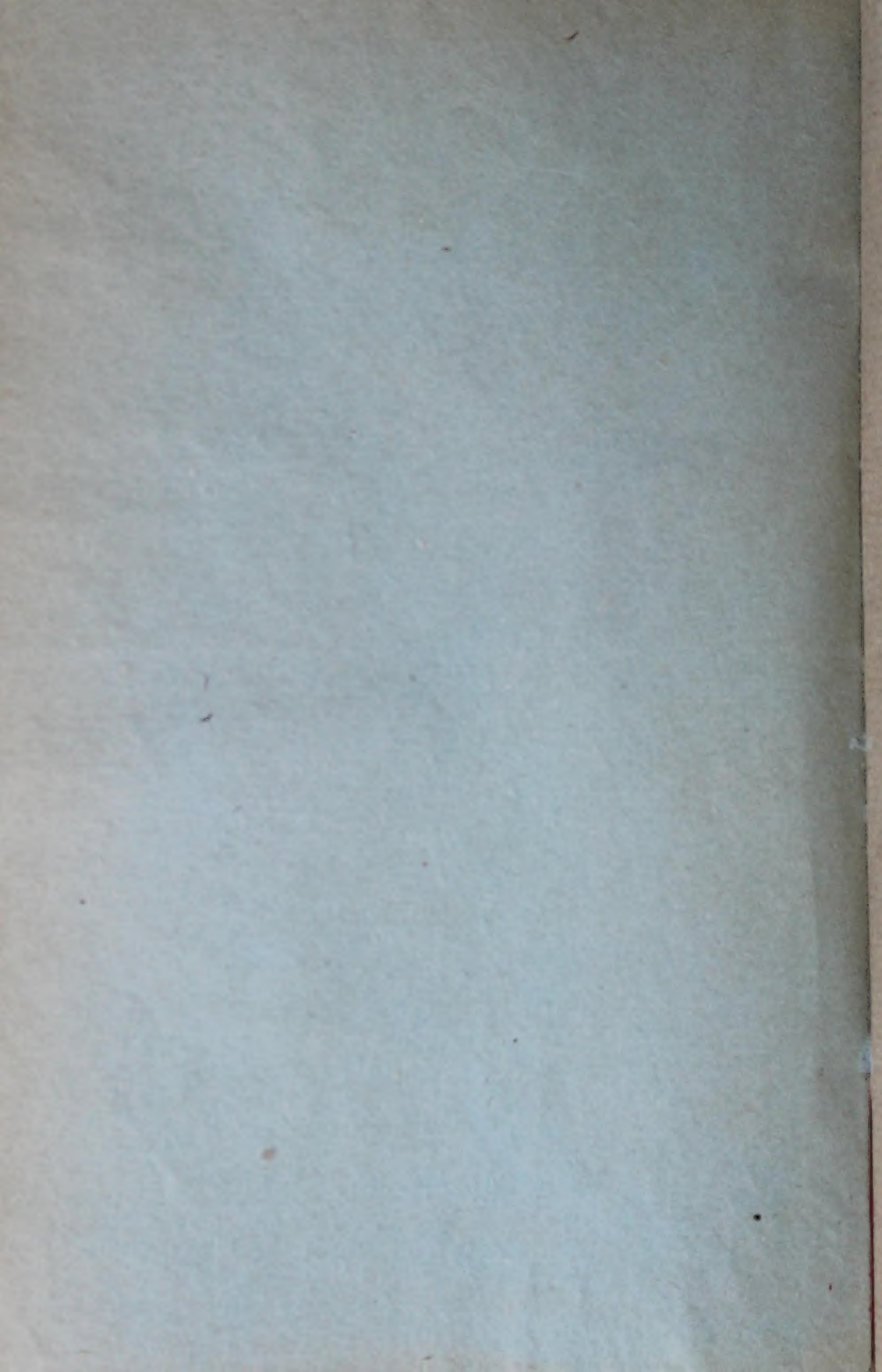
صحیح نامہ

جبر و مقابلہ - حصہ اول (طبع چہارم)

صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط
$\frac{(3-5)(1+2)}{1-2}$	$\frac{(3-5)(1+2)}{1-2}$	۵	۱۱۳	$\frac{3}{3} = \frac{3}{3}$	$\frac{3}{3} = \frac{3}{3}$	۱۸	۱۴
باب ہشتم	باب ہشتم	پیشانی	۱۲۹	$\frac{1}{1} \times \frac{2}{2} + \frac{3}{3} = \frac{1}{1} \times \frac{2}{2} + \frac{3}{3}$	$\frac{1}{1} \times \frac{2}{2} + \frac{3}{3} = \frac{1}{1} \times \frac{2}{2} + \frac{3}{3}$	۲۱	۶۵
$\frac{1-2 \times 3+2}{1-2}$	$\frac{1-2 \times 3+2}{1-2}$	۴	"	حصہ اول - باب اول	پیشانی	۷۲	۷۲
۳	۳	۱۳	"	$3 \times 3 + 3 \times 3 = 3 \times 3 + 3 \times 3$	$3 \times 3 + 3 \times 3 = 3 \times 3 + 3 \times 3$	۲۳	۸۷
۵	۵	۱۷	"				
باب ہشتم	باب ہشتم	پیشانی	۱۳۰	$\frac{(1+2)(1+2)}{1} + \frac{(1+2)(1+2)}{1}$	$\frac{(1+2)(1+2)}{1} + \frac{(1+2)(1+2)}{1}$	۱۸	۹۱
ثابت کرو کہ	ثابت کرو کہ	۴	"				
ب ل - ج ل	ب ل - ج ل	۵	۱۳۸	۱۴	۹۴
$3+2-3$	$3+2-3$	۲	۱۴۰	نامکمل انبار	نامکمل انبار	۶	۹۹
$(3+2-3)$	$(3+2-3)$	۱۷	۱۴۴	پنجلی تہ	پنجلی تہ	۱۳	۱۰۱
$\frac{3 \times 2 + 3}{2} = \frac{3 \times 2 + 3}{2}$	$\frac{3 \times 2 + 3}{2} = \frac{3 \times 2 + 3}{2}$	۱۶	۱۴۹			۱۳	۱۰۷
$\frac{(3-5)(1+2)}{(3-5)(1+2)}$	$\frac{(3-5)(1+2)}{(3-5)(1+2)}$	۲	۱۵۶	اکٹھا	اکٹھا	۱۰	۱۱۰
مساوات درجہ دوم	مساوات درجہ دوم						

صحیح	غلط	صفحہ	صفحہ	صحیح	غلط	صفحہ	صفحہ
۱۸۰ تا ۱۷۷	۱۸۰ تا ۱۷۷	۱۳	۲۷۱	$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	۵	۱۷۳
$\sqrt{17}$	$\sqrt{17}$	۲۷۲	۲۷۲	$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$		
$\sqrt{17}$	$\sqrt{17}$	۱۱	۲۷۵	باب دہم	باب یازدہم	پیشانی	۱۷۷ ۱۷۸ ۱۷۹
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	۲	۲۷۹	رکھا جائے	رکھا جائے	۴	۱۸۰
$\sqrt{17}$	$\sqrt{17}$	۱۶	"	رکھا جائے	رکھا جائے		
$\sqrt{17}$	$\sqrt{17}$	۱۲	۲۹۰	بنائے جائیں	بنائے جائیں	۲۳	۱۸۱
$\sqrt{17}$	$\sqrt{17}$	۱۴	"	ج = ۲۲-۱۵	ج = ۲۲-۱۵	۱۰	۱۹۳
$\sqrt{17}$	$\sqrt{17}$	۱۸	"	ج = ۱۲-۱۵	ج = ۱۲-۱۵	۱۸	۱۹۴
ج ۳	ج ۳	۱۳	۳۰۳	نیز انکی	نیز انکی	۱۸	۲۰۳
			۳۳۱ ۳۳۲ ۳۳۳ ۳۳۴ ۳۳۵	چار آدمیوں کے	چار آدمیوں کے	۲۲	۲۰۴
باب ہفتم	باب شانزدہم	پیشانی		ارتقام	ارتقام	۱۸	۲۳۵
				۱۶	۱۶	۱۹	۲۴۵
$\sqrt{17}$	$\sqrt{17}$	۱۳	۳۳۴	ق + ۱	ق + ۱	۱۷	۲۵۲
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	۱۷	۳۴۱	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	۴	۲۵۴
ثابت کرو کہ	ثابت کرو کہ	۱۴	۳۴۳	ج + ج	ج + ج	۱۲	"
$\sqrt{17}$	$\sqrt{17}$	۱۴	۳۶۲	اجتماعوں	اجتماعوں	۱۳	"
اور ماہ ۴ ب با	اور ماہ ۴ ب با	۳	۳۶۳	$\left(\frac{1}{3} - 1\right)$	$\left(\frac{1}{3} - 1\right)$	۸	۲۵۷
Algebraical	Algebraical			چھوٹی	چھوٹی	۲۰	۲۷۰







**ALLAMA
IQBAL LIBRARY**

**UNIVERSITY OF KASHMIR
HELP TO KEEP THIS BOOK
FRESH AND CLEAN**